

*Der geometrische Ansatz zur inversen
Streutheorie bei der Dirac-Gleichung*

Wolf Jung

*Eingereicht als Diplomarbeit im Studiengang Mathematik
bei der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der RWTH Aachen am 29. August 1996*

*Betreuer: Herr Professor V. Enß
Institut für Reine und Angewandte Mathematik*

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Inverse Streutheorie	4
1.2	Aufbau der Arbeit	7
1.3	Bezeichnungskonventionen	8
2	Vorbereitende Sätze	11
2.1	Konvergenzbegriffe im Hilbertraum	11
2.2	Das Bochner-Integral	14
2.3	Kurzreichweitige Magnetfelder	15
2.4	Kompakte Magnetfelder	18
2.5	Die X-Ray-Transformation	20
3	Die freie Zeitentwicklung	25
3.1	Das Prinzip der nicht-stationären Phase	25
3.2	Der verallgemeinerte Schrödinger-Operator	26
3.3	Der skalare relativistische Hamiltonoperator	27
3.4	Der Dirac-Operator	29
3.5	Die Foldy-Wouthuysen-Darstellung	32
4	Kurzreichweitige Potentiale	37
4.1	Existenz und Vollständigkeit der Wellenoperatoren	37
4.2	Der verallgemeinerte Schrödinger-Operator	39
4.3	Der skalare relativistische Hamiltonoperator	41
4.4	Der Dirac-Operator	44
4.5	Die Dirac-Gleichung mit Magnetfeld	45
5	Inverse Streutheorie für den verallgemeinerten Schrödinger- Operator	51
5.1	Der Hochenergielimes von S	52
5.2	Rekonstruktion des Potentials	54

6	Inverse Streutheorie für den skalaren relativistischen Hamilton-operator	56
6.1	Der Hochenergielimes von S	57
6.2	Rekonstruktion des Potentials	60
7	Inverse Streutheorie für den Dirac-Operator	62
7.1	Der Hochenergielimes von S	62
7.2	Der Hochenergielimes von S_{\pm}	69
7.3	Rekonstruktion elektromagnetischer Felder	73
7.4	Rekonstruktion kompakter Magnetfelder	74
8	Diskussion	78
8.1	Bemerkungen zur stationären Theorie	78
8.2	Physikalische Deutung	79
8.3	Zusammenfassung und Ausblick	80

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Inverse Streutheorie

In der Quantenmechanik für ein Teilchen im ν -dimensionalen Raum betrachtet man Zustände Ψ in einem separablen Hilbertraum \mathcal{H} . Eine Realisierung ist $\psi(\mathbf{x})$ in $L^2(\mathbb{R}^\nu, d\mathbf{x})$, in dieser Darstellung sind die selbstadjungierten Komponenten des Ortsoperators x_1, \dots, x_ν Multiplikationsoperatoren. Die Komponenten des Impulsoperators \mathbf{p} sollen die kanonischen Vertauschungsrelationen $[x_i, p_k] = i\delta_{ik}$ erfüllen, die übliche Wahl ist $\mathbf{p} = -i\nabla_{\mathbf{x}}$ (wir verwenden Einheiten mit $c = 1$ und $\hbar = 1$). Durch Fouriertransformation erhält man die Impulsdarstellung $\hat{\psi}(\mathbf{p})$ in $L^2(\mathbb{R}^\nu, d\mathbf{p})$, in dieser Darstellung sind die p_i Multiplikationsoperatoren. \mathbf{p} erzeugt Translationen im Ortsraum und \mathbf{x} erzeugt Translationen im Impulsraum. Mit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^\nu$ gilt für Zustände:

$$\left(e^{-i\mathbf{v}\mathbf{p}}\psi\right)(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \quad \text{und} \quad \left(e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}\hat{\psi}\right)(\mathbf{p}) = \hat{\psi}(\mathbf{p} - \mathbf{v}) \quad (1.1)$$

und entsprechend für Operatoren:

$$e^{i\mathbf{v}\mathbf{p}}f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{v}\mathbf{p}} = f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) \quad \text{und} \quad e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}}f(\mathbf{p})e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} = f(\mathbf{p} + \mathbf{v}) . \quad (1.2)$$

Die Zeitentwicklung des Systems ist gegeben durch die unitäre Gruppe e^{-iHt} , erzeugt von dem selbstadjungierten Hamiltonoperator H , der nach dem de-Broglie-Prinzip „Energie = Frequenz“ als Operator der Energie aufzufassen ist. In vielen Fällen erhält man H formal dadurch, daß man in der Hamiltonfunktion eines klassischen Systems die Variablen \mathbf{x} und \mathbf{p} durch die entsprechenden Operatoren ersetzt. Dabei ist oft $H = H_0 + V$, wobei H_0 ein Pseudo-Differentialoperator ist, der der kinetischen Energie entspricht. V ist ein Multiplikationsoperator und stellt das Potential eines äußeren Kraftfeldes dar.

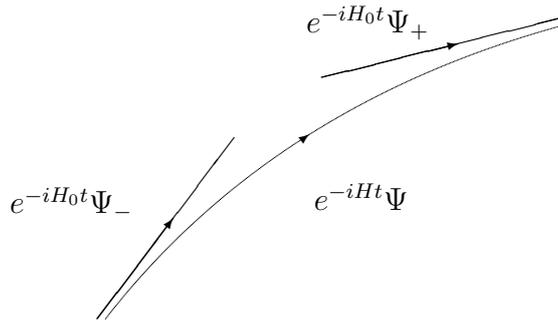
In der zeitabhängigen Streutheorie versucht man das Langzeitverhalten von $e^{-iHt}\Psi$ durch Vergleich mit der freien Zeitentwicklung $e^{-iH_0t}\Psi_{\pm}$ zu beschreiben, es soll gelten

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (e^{-iHt}\Psi - e^{-iH_0t}\Psi_{\pm}) = 0 .$$

Man definiert (für H_0 mit rein kontinuierlichem Spektrum) die Wellenoperatoren durch

$$\Omega_{\pm} = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_0t} .$$

Falls Ω_{\pm} existieren, so sind sie isometrisch, und zu den Ψ_{\pm} existiert ein Ψ . Falls $\text{Ran } \Omega_+ = \text{Ran } \Omega_- = \mathcal{H}^{\text{cont}}(H)$ gilt, so heißen die Ω_{\pm} vollständig, und zu $\Psi \in \mathcal{H}^{\text{cont}}(H)$ existieren Ψ_{\pm} . Die S-Matrix $S = \Omega_+^* \Omega_-$ ist in diesem Fall unitär. Mit $\Psi_+ = S\Psi_-$ läßt sich dies dahingehend interpretieren, daß ein einlaufendes Teilchen $e^{-iH_0t}\Psi_-$ nicht vom Kraftfeld eingefangen wird, sondern dieses als $e^{-iH_0t}\Psi_+$ wieder verläßt. Die folgende Abbildung veranschaulicht dies:



Die Fragestellung der inversen Streutheorie lautet: Gegeben sind S und H_0 , gesucht ist V . Oder physikalisch betrachtet: Läßt sich das Potential aus den Ergebnissen von Streuexperimenten rekonstruieren? In [12, 13, 14, 15] lösen V. Enß und R. Weder das inverse Streuproblem für die Schrödinger-Gleichung, also $H_0 = 1/2 \mathbf{p}^2$, mit der folgenden geometrischen Methode: Mit einer Translation im Impulsraum um $\mathbf{v} = v\omega$ wird der Hochenergielimes von S untersucht, durch Grenzübergang $|\mathbf{v}| = v \rightarrow \infty$ bei festgehaltenem Einheitsvektor ω . Zwischen geeigneten Zuständen Φ, Ψ ergibt sich

$$\left(\Phi, iv(e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} - 1) \Psi \right) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left(\Phi, V(\mathbf{x} + \omega\tau) \Psi \right) \quad \text{für } v \rightarrow \infty .$$

Aus dieser X-Ray-Transformation läßt sich V eindeutig rekonstruieren. Dabei sind beliebige kurzreichweitige Potentiale zugelassen, diese sind Kato-beschränkt mit relativer Schranke $a < 1$ bezüglich H_0 und erfüllen die Abfallbedingung

$$\int_0^{\infty} dR \left\| V(\mathbf{p}^2 + 1)^{-1} F(|\mathbf{x}| \geq R) \right\| < \infty .$$

Dabei bezeichnet $F(\cdot)$ den Operator der Multiplikation mit der charakteristischen Funktion $\chi(\cdot)$. Diese Methode wird auch auf Mehrteilchensysteme und auf langreichweitige Potentiale (bei gegebenem langreichweitigem Anteil) angewandt. Sie funktioniert nur für $\nu > 1$, da sich bei $\nu = 1$ die X-Ray-Transformierte von V auf eine Zahl reduziert. Die Methode ist jedoch einfacher und ergibt allgemeinere Resultate als der stationäre Ansatz [4, 17, 31, 32].

In dieser Arbeit wird die zeitabhängige, geometrische Methode der inversen Streutheorie auf drei freie Zeitentwicklungen angewandt, wobei die obige Definition kurzreichweitiger Potentiale entsprechend angepaßt wird:

1. Zuerst betrachten wir $H_0 = |\mathbf{p}|^\alpha$ mit $\alpha > 1$. Darin ist der Schrödinger-Operator für $\alpha = 2$ enthalten. Es ergibt sich eine analoge Formel für den Hochenergielimes von S (Satz 5.1):

$$i\alpha v^{\alpha-1} \left(e^{-i\nu\mathbf{x}} S e^{i\nu\mathbf{x}} - 1 \right) \Psi \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau V(\mathbf{x} + \omega\tau) \Psi \quad \text{für } v \rightarrow \infty ,$$

daraus läßt sich nun V eindeutig rekonstruieren. H_0 stellt für $\alpha \neq 2$ kein physikalisches System dar, ermöglicht aber die folgende qualitative Betrachtung, die den Unterschied zwischen Schrödinger-Gleichung und relativistischer Quantentheorie verdeutlicht: $Q = \alpha v^{\alpha-1}$ ist der asymptotische Ausdruck der Geschwindigkeit, und die Formel läßt sich dahingehend interpretieren, daß der Term n -ter Ordnung in der Bornschen Reihe von der Größenordnung $1/Q^n$ ist und somit nur der Term erster Ordnung im Grenzübergang $\lim_{Q \rightarrow \infty} iQ(S(Q) - 1)$ übrigbleibt.

2. Für $\alpha = 1$ bleibt die Geschwindigkeit jedoch beschränkt, wenn der Grenzübergang $v \rightarrow \infty$ im Impulsraum erfolgt. Nun bleiben die Terme der Bornschen Reihe von derselben Größenordnung, sie vereinfachen sich jedoch soweit, daß sich der Grenzwert von S explizit angeben läßt. Für $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ mit $m \geq 0$ ergibt sich (Satz 6.1)

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\nu\mathbf{x}} S e^{i\nu\mathbf{x}} = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} V(\mathbf{x} + \omega t) dt \right\} ,$$

und daraus lassen sich zumindest stetige kurzreichweitige Potentiale eindeutig rekonstruieren. $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ist zwar nicht der Hamiltonoperator eines physikalischen Systems, doch wir betrachten ihn in folgendem Sinne als relativistischen Hamiltonoperator: Der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ entsprechend haben die Symbole des Dirac-Operators $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ und des Klein-Gordon-Operators (vergleiche

(3.3) in Abschnitt 3.4) die Eigenwerte $\pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Daher wird das Verhalten dieser relativistischen Hamiltonoperatoren teilweise von $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ widergespiegelt und ist hier gegebenenfalls leichter zu untersuchen.

3. Der Dirac-Operator ist $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_\nu p_\nu + \beta m$ mit $m \geq 0$ und geeigneten Matrizen $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \beta \in \mathbb{C}^{\mu \times \mu}$. Er wirkt auf Spinoren $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C}^\mu)$. Die Dirac-Gleichung ist das physikalische Modell für relativistische Elektronen, zumindest soweit eine relativistische Einteilchen-Quantenmechanik sinnvoll ist. Ein äußeres elektromagnetisches Feld wird über die Potentialmatrix $V = A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}$ in die Gleichung eingeführt. Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist Satz 7.6:

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} S_\pm e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 \mp \omega \cdot \mathbf{A})(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt \right\}$$

Dabei ist \mathbf{x}_{NW} der Newton-Wigner-Ortsoperator, und S_\pm beschreiben die Streuung von Elektronen positiver/negativer Energie in der Foldy-Wouthuysen-Darstellung. Hiermit lassen sich nun das elektrische Feld $\mathbf{E} = -\text{grad } A_0$ und das Magnetfeld $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ eindeutig rekonstruieren. Dies wird auf zweidimensionale Magnetfelder mit kompaktem Träger verallgemeinert, für die A im allgemeinen nicht kurzreichweitig ist.

Die Hauptergebnisse der vorliegenden Arbeit werden in [21] veröffentlicht.

In [20] untersucht H.T. Ito die Dirac-Gleichung mit stationären Methoden. Er kommt zu ähnlichen Ergebnissen, benötigt allerdings wesentlich stärkere Voraussetzungen.

In [2, 3] untersucht Silke Arians die Schrödinger-Gleichung mit Magnetfeld und erhält die zur obigen Formel analoge Aussage

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} = \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x} + \omega t) dt \right\}$$

sowie eine Methode zur Rekonstruktion von A_0 , wobei dieses im Unterschied zur relativistischen Theorie nicht im Exponenten auftritt.

Für die Funktionalanalysis und Streutheorie im Hilbertraum verweisen wir auf [28, 29, 30], für die Dirac-Gleichung auf [35] und für den physikalischen Hintergrund auf [5, 6, 25, 26].

1.2 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 stellen wir grundlegende Sätze zu Konvergenzbegriffen im Hilbertraum und zum Bochner-Integral vor. Wir untersuchen den Abfall und die Eich-

freiheit des Vektorpotentials bei Magnetfeldern und die Injektivität der X-Ray-Transformation.

In Kapitel 3 untersuchen wir die drei freien Zeitentwicklungen, insbesondere wird eine Abschätzung mit der Methode der nicht-stationären Phase hergeleitet. Hier stellen wir auch die Dirac-Matrizen und die Foldy-Wouthuysen-Darstellung vor.

In Kapitel 4 behandeln wir kurzreichweitige Potentiale für die drei freien Hamiltonoperatoren und erhalten eine grundlegende Abschätzung, die in den folgenden Beweisen für die Anwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz benötigt wird. Außerdem untersuchen wir die Eichinvarianz der S -Matrix.

Während sich in den Kapiteln 3 und 4 eine parallele Darstellung anbietet, erfordern die Untersuchung der Asymptotik von S und die Rekonstruktion von V unterschiedliche Methoden für die drei freien Hamiltonoperatoren. Dies erfolgt in Kapitel 5 für $H_0 = |\mathbf{p}|^\alpha$, in Kapitel 6 für $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ und in Kapitel 7 für den Dirac-Operator $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$.

In Kapitel 8 werden die Ergebnisse diskutiert, etwa in Hinblick auf ihre physikalische Interpretation und auf mögliche Verallgemeinerungen.

1.3 Bezeichnungskonventionen

Vektoren werden durch Fettdruck gekennzeichnet, wie z.B. \mathbf{x} , \mathbf{p} , \mathbf{v} , \mathbf{A} , \mathbf{B} . Die Identität von \mathcal{H} wird in der Bezeichnung nicht von der Zahl 1 unterschieden, und Vielfache der Identität werden entsprechend vereinfacht dargestellt, z.B. bei Resolventen $(A - \lambda)^{-1}$ statt $(A - \lambda 1)^{-1}$. Weit verbreitet ist die Konvention, Riemann- und Lebesgue-Integrale durch die Bezeichnungsweise

$$\int_a^b dx f(x) \quad \text{und} \quad \int_{[a,b]} f$$

zu unterscheiden. Diese Konvention wird hier nicht verwendet, insbesondere werden auch Lebesgue- und Bochner-Integrale meist in der ersten Form dargestellt. Die Angabe der Integrationsgrenzen ermöglicht z.B. die Schreibweise $\int_0^{\pm\infty} dt$, und die Angabe des Differentials ist von Vorteil, wenn bezüglich einer von mehreren Variablen integriert wird.

Einige oft verwendete Symbole:

$S^{\nu-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\nu \mid \mathbf{x} = 1\}$	Kugeloberfläche
$\omega_\nu = S^{\nu-1} = 2\pi^{\nu/2}/\Gamma(\nu/2)$	Flächeninhalt
$L^p, \ \cdot\ _p$	Standard-Banachraum und Norm
$\ \cdot\ _{L^p+L^\infty}$	vergleiche (4.2) in Abschnitt 4.2
$\mathcal{S}, \mathcal{S}'$	Schwarzsche Funktionen/Distributionen
$C_0^k(G)$	C^k -Funktionen mit kompaktem Träger in G
$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$ bzw. $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C}^\mu)$	Hilbertraum
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	Banachraum der Endomorphismen von \mathcal{H}
$\Psi, \psi(\mathbf{x}), \hat{\psi}(\mathbf{p})$	Zustand, Orts- und Impulsdarstellung
$\psi_{FW}(\mathbf{y}), \hat{\psi}_{FW}(\mathbf{q})$	Foldy-Wouthuysen-Darstellung
\mathbf{x}, \mathbf{p}	Orts- und Impulsoperator
\mathbf{x}_{NW}	Newton-Wigner-Ortsoperator
\mathbf{y}, \mathbf{q}	FW-Darstellung von $\mathbf{x}_{NW}, \mathbf{p}$
H_0	freier Hamiltonoperator, z.B.:
$H_0 = \mathbf{p} ^\alpha$ mit $\alpha > 1$	Verallgemeinerung des Schrödinger-Operators
$H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ mit $m \geq 0$	skalarer relativistischer Hamiltonoperator
$H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ mit $m \geq 0$	freier Dirac-Operator, Definition 3.4
$P_\pm = 1/2(1 \pm H_0/E)$	Projektor auf $\mathcal{H}(H_0 = \pm E)$
$\mathcal{H}_\pm = P_\pm \mathcal{H} = \mathcal{H}(H_0 = \pm E)$	spektrale Teilräume
$U(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \left(1 + \beta \frac{\alpha \mathbf{p}}{E+m}\right)$	vergleiche Definition 3.8
\mathcal{U}	vergleiche Lemma 3.10
V	Potential/Potentialmatrix

$H = H_0 + V$	Hamiltonoperator
$\mathbf{v} = v\omega, v = \mathbf{v} , \omega \in S^{\nu-1}$	Translation im Impulsraum (keine Geschwindigkeit)
\mathbf{Q}	Geschwindigkeitsoperator
$F(\mathbf{x} \geq R)$	Multiplikation mit $\chi(\mathbf{x} \geq R)$
$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$	relativistische Gesamtenergie
\mathbf{j}	Stromdichte
\mathbf{E}	elektrische Feldstärke
\mathbf{B}, B	magnetische Flußdichte
A_0	elektrostatisches Potential
\mathbf{A}	Vektorpotential des Magnetfeldes
Ω_{\pm}	Wellenoperatoren
$S = \Omega_{+}^* \Omega_{-}$	Streumatrix
S_{\pm}	vergleiche Definition 3.8
$\text{supp}(\cdot)$	Träger einer Funktion
■	Ende eines Beweises

Kapitel 2

Vorbereitende Sätze

In Abschnitt 1 stellen wir grundlegende Sätze zu den Konvergenzbegriffen im Hilbertraum vor. Für weitere Begriffe aus der Funktionalanalysis im Hilbertraum, etwa Unitarität, Selbstadjungiertheit, Satz von Stone, Satz von Kato-Rellich, verweisen wir auf [28, 29]. Abschnitt 2 ist dem Bochner-Integral gewidmet. Wir benötigen es nur für Abbildungen von \mathbb{R} in einen separablen Hilbertraum, es läßt sich auf beliebige Banachräume verallgemeinern. Die Eichfreiheit und die Abfalleigenschaften von Vektorpotentialen werden in den Abschnitten 3 und 4 untersucht, und Abschnitt 5 behandelt die Injektivität der X-Ray-Transformation.

2.1 Konvergenzbegriffe im Hilbertraum

Sei \mathcal{H} ein separabler Hilbertraum. Wir stellen einige Aussagen zu Grenzwertbegriffen für Operatoren in \mathcal{H} zusammen. Sie werden für Operatorfolgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formuliert, gelten jedoch analog für Operatorscharen $(A(t))_{t \in \mathbb{R}}$. Wir benötigen neben der Konvergenz bezüglich der Operatornorm $\|A\| = \sup \|A\Psi\|/\|\Psi\|$ hauptsächlich die folgenden drei Konvergenzbegriffe:

Definition 2.1 (Konvergenzbegriffe)

1. Seien A_n beschränkt und für alle $\Psi \in \mathcal{H}$ gelte $A_n\Psi \rightarrow A\Psi$. Dann konvergiert A_n gegen A stark: $A_n \xrightarrow{s} A$.
2. Seien A_n beschränkt und für alle $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}$ gelte $(\Phi, A_n\Psi) \rightarrow (\Phi, A\Psi)$. Dann konvergiert A_n gegen A schwach: $A_n \xrightarrow{w} A$.
3. Seien A_n und A selbstadjungiert und es gelte $(A_n + i)^{-1} \xrightarrow{s} (A + i)^{-1}$. Dann konvergiert A_n gegen A im Sinne der starken Resolventenkonvergenz: $A_n \xrightarrow{sr} A$.

Mit dem Satz von Banach-Steinhaus folgt, daß A in 1. und 2. ebenfalls beschränkt ist. Die starke Resolventenkonvergenz ist insbesondere für unbeschränkte Operatoren interessant.

Lemma 2.2 (Konvergenzkriterien)

1. Seien $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$ und $A_n(\mathbf{x}), A(\mathbf{x})$ gleichmäßig beschränkte Multiplikationsoperatoren mit $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})$ für fast alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\nu$. Dann gilt $A_n \xrightarrow{s} A$.
2. Seien A_n beschränkt. Dann gilt $A_n \xrightarrow{s} A \Rightarrow A_n \xrightarrow{w} A$.
3. Seien A_n, A gleichmäßig beschränkt und $D \subset \mathcal{H}$ dicht. Für alle $\Psi \in D$ gelte $A_n \Psi \rightarrow A \Psi$. Dann gilt $A_n \xrightarrow{s} A$.
4. Seien A_n, A gleichmäßig beschränkt und $D \subset \mathcal{H}$ dicht. Für alle $\Phi, \Psi \in D$ gelte $(\Phi, A_n \Psi) \rightarrow (\Phi, A \Psi)$. Dann gilt $A_n \xrightarrow{w} A$.
5. Seien A_n, A selbstadjungiert mit einem gemeinsamen Kernbereich D . Für alle $\Psi \in D$ gelte $A_n \Psi \rightarrow A \Psi$. Dann gilt $A_n \xrightarrow{st} A$.

Beweis: 1. Dies folgt mit dem Satz über majorisierte Konvergenz, angewandt auf die Funktion $\left\| (A_n(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})) \Psi(\mathbf{x}) \right\|^2$.

2. Dies folgt mit der Stetigkeit des Skalarproduktes.

3. und 4. ergeben sich mit der $\varepsilon/3$ - bzw. $\varepsilon/5$ -Methode.

5. Dies ist Theorem VIII.25(a) in [28]. ■

Lemma 2.3 (Starke Konvergenz)

1. Seien A_n beschränkt. Dann gilt für $\Psi_n, \Psi \in \mathcal{H}$:
 $A_n \xrightarrow{s} A$ und $\Psi_n \rightarrow \Psi \Rightarrow A_n \Psi_n \rightarrow A \Psi$.
2. Seien A_n, B_n beschränkt. Dann gilt:
 $A_n \xrightarrow{s} A$ und $B_n \xrightarrow{s} B \Rightarrow A_n B_n \xrightarrow{s} A B$.
3. Seien U_n isometrisch und U unitär, dann gilt:
 $U_n \xrightarrow{s} U \Rightarrow U_n^* \xrightarrow{s} U^*$.

Beweis: 1. Die A_n sind nach dem Satz von Banach-Steinhaus gleichmäßig beschränkt, also $\|A_n\| \leq M$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \|A_n \Psi_n - A \Psi\| &= \|A_n(\Psi_n - \Psi) + (A_n - A)\Psi\| \\ &\leq M \|\Psi_n - \Psi\| + \|(A_n - A)\Psi\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2. Dies wird vollkommen analog bewiesen.

3. Sei $\Psi \in \mathcal{H}$. Es gilt $\|(U_n^* - U^*)\Psi\| = \|U_n^*(U - U_n)U^*\Psi\| \leq \|(U - U_n)U^*\Psi\| \rightarrow 0$.

■

Lemma 2.4 (Schwache Konvergenz)

1. Seien A_n, B_n beschränkt. Dann gilt

$$A_n \xrightarrow{s} A, B_n \xrightarrow{s} B \quad \Rightarrow \quad A_n^* B_n \xrightarrow{w} A^* B.$$

2. Seien U_n, U isometrisch, dann gilt $U_n \xrightarrow{w} U \quad \Rightarrow \quad U_n \xrightarrow{s} U$.

Beweis: 1. Dies folgt mit $(\Phi, A_n^* B_n \Psi) = (A_n \Phi, B_n \Psi)$ aus der Stetigkeit des Skalarproduktes.

2. Sei $\Psi \in \mathcal{H}$. Es gilt

$$\|(U_n - U)\Psi\|^2 = \underbrace{\|U_n \Psi\|^2}_{=\|U\Psi\|^2} - 2 \underbrace{\operatorname{Re}(U_n \Psi, U\Psi)}_{\rightarrow \|U\Psi\|^2} + \|U\Psi\|^2 \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Lemma 2.5 (Starke Resolventenkonvergenz) Seien A_n, A selbstadjungiert mit $A_n \xrightarrow{sr} A$. Dann gilt:

1. Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und beschränkt, dann gilt $f(A_n) \xrightarrow{s} f(A)$. Insbesondere gilt $e^{-iA_n t} \xrightarrow{s} e^{-iAt}$.

2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall mit $I \cap \sigma^{pp}(A) = \emptyset$. Dann gilt $P_I(A_n) \xrightarrow{s} P_I(A)$.

Für den Beweis verweisen wir auf Theorem VIII.20 und Theorem VIII.24 in [28].

2.2 Das Bochner-Integral

Wir stellen das Bochner-Integral für Abbildungen $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ vor, wobei \mathcal{H} ein separabler Hilbertraum ist. Für eine weitergehende Diskussion verweisen wir auf [7, 36].

Definition 2.6 (Meßbarkeit) Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$.

1. Ψ heißt *Elementarfunktion*, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt und die jeweiligen Urbilder meßbar sind, und wenn das Urbild von $\mathcal{H} \setminus \{0\}$ ein endliches Maß hat.
2. Ψ heißt *stark meßbar*, wenn eine Folge von Elementarfunktionen Ψ_n existiert mit $\Psi_n(t) \rightarrow \Psi(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$.
3. Ψ heißt *Borel-meßbar*, wenn das Urbild jeder offenen Menge meßbar ist.
4. Ψ heißt *schwach meßbar*, wenn $t \mapsto (\Phi, \Psi(t))$ für alle $\Phi \in \mathcal{H}$ meßbar ist.

Lemma 2.7 (Meßbarkeit)

Sei \mathcal{H} ein separabler Hilbertraum und $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$. Dann sind äquivalent:

1. Ψ ist stark meßbar.
2. Ψ ist Borel-meßbar.
3. Ψ ist schwach meßbar.

Zum Beweis verweisen wir auf [28, Theorem IV.22]. Insbesondere ist also jede stetige Funktion stark meßbar.

Definition 2.8 (Bochner-Integral) Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$.

1. Ψ heißt *Bochner-integrierbar*, wenn eine Folge von Elementarfunktionen Ψ_n existiert mit $\Psi_n(t) \rightarrow \Psi(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ und $\int \|\Psi - \Psi_n\| \rightarrow 0$.
2. Dann ist das Bochner-Integral von Ψ definiert durch

$$\int \Psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \Psi_n$$

mit der natürlichen Definition des Integrals einer Elementarfunktion.

Lemma 2.9 (Bochner-Integral) Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$.

1. Ψ ist genau dann Bochner-integrierbar, wenn Ψ stark meßbar ist und $\int \|\Psi\| < \infty$ gilt.
2. Dann ist $\| \int \Psi \| \leq \int \|\Psi\|$.

Für den Beweis vergleiche [36, p.133, Theorem 1].

Satz 2.10 (Majorisierte Konvergenz)

Seien $\Psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ Bochner-integrierbar mit $\Psi_n(t) \rightarrow \Psi(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$. Es gebe eine Funktion $h \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\|\Psi_n(t)\| \leq h(t)$ für $n \in \mathbb{N}$ und fast alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist Ψ Bochner-integrierbar und $\int \Psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \Psi_n$.

Beweis: Ψ ist stark meßbar, und wegen $\|\Psi(t)\| \leq h(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ ist Ψ Bochner-integrierbar. Wir erhalten

$$\left\| \int \Psi - \int \Psi_n \right\| \leq \int \|\Psi - \Psi_n\| \rightarrow 0$$

nach dem gewöhnlichen Satz über majorisierte Konvergenz, denn es gilt $\|\Psi(t) - \Psi_n(t)\| \rightarrow 0$ fast überall und $\|\Psi(t) - \Psi_n(t)\| \leq 2h(t)$. ■

Wir verwenden im folgenden die sonst für Riemann-Integrale übliche Schreibweise $\int_a^b dt \Psi(t)$ auch für Bochner-Integrale.

2.3 Kurzreichweitige Magnetfelder

Wir betrachten statische elektromagnetische Felder, und zwar zunächst im \mathbb{R}^3 . Die elektrische Feldstärke ist ein Vektorfeld \mathbf{E} mit $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Sie läßt sich daher als $\mathbf{E} = -\text{grad } A_0$ mit dem skalaren Potential A_0 schreiben. Dieses ist bis auf eine Konstante bestimmt. Wenn \mathbf{E} hinreichend schnell abfällt, dann existiert $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} A_0(\mathbf{x})$, und A_0 wird eindeutig bestimmt durch die Forderung, daß es im Unendlichen verschwindet.

Die magnetische Flußdichte \mathbf{B} erfüllt $\text{div } \mathbf{B} = 0$ (es gibt keine magnetischen Monopole) und läßt sich daher als $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ mit dem Vektorpotential \mathbf{A} schreiben. Dieses ist durch \mathbf{B} nur bis auf einen Gradienten bestimmt. Man bezeichnet dies als Eichfreiheit, es besteht allerdings kein Zusammenhang zum Begriff der Eichung eines Meßgerätes. Eine wichtige Eichung ist die Coulomb-Eichung mit $\text{div } \mathbf{A} = 0$, eine andere ist die transversale Eichung mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$. In diesen Eichungen existiert zu vorgegebenem \mathbf{B} höchstens ein \mathbf{A} mit $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0$.

Für die Coulomb-Eichung folgt dies aus dem Maximum-Prinzip für harmonische Funktionen. Das Magnetfeld \mathbf{B} wird erzeugt durch die Stromdichte \mathbf{j} gemäß $\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j}$. Diese erfüllt $\text{div } \mathbf{j} = 0$, wodurch die Ladungserhaltung gewährleistet ist.

Eine Punktmasse m mit der Ladung e folgt in der nicht-relativistischen Mechanik der Bewegungsgleichung $m\ddot{\mathbf{x}} = e(\mathbf{E} + \mathbf{Q} \times \mathbf{B})$ mit der Geschwindigkeit $\mathbf{Q} = \dot{\mathbf{x}}$. Die entsprechende relativistische Gleichung ergibt sich aus der Lagrange-Funktion $-m\sqrt{1 - \mathbf{Q}^2} - (A_0(\mathbf{x}) - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}))$ und ist Lorentz-invariant, wenn man (A_0, \mathbf{A}) als Vierervektor transformiert, da dann das Wirkungsintegral invariant ist. Daraus erhält man das Transformationsverhalten von \mathbf{E} und \mathbf{B} , die sich zu einem antisymmetrischen Tensor zusammenfassen lassen. (Historisch betrachtet verlief es umgekehrt: Zuerst wurde die Lorentz-Transformation entdeckt, die im Unterschied zur Gallilei-Transformation die Maxwell-Gleichungen invariant läßt. Später wurde die Relativitätstheorie entwickelt, um eine konsistente Interpretation der Lorentz-Transformation zu ermöglichen.) Da die Lorentz-Transformation ein statisches inhomogenes Feld in ein zeitabhängiges Feld überführt und wir nur die Streutheorie für statische Felder untersuchen, werden wir uns nicht weiter mit Fragen der relativistischen Invarianz befassen (sie bildete allerdings eine wesentliche Motivation für die Entwicklung der Dirac-Gleichung).

In beliebiger Dimension sind \mathbf{E} und \mathbf{A} weiterhin Vektoren, doch \mathbf{B} wird ersetzt durch die Differentialform zweiter Stufe $d(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x})$, die sich durch die schiefsymmetrische Matrix $\partial_i \mathbf{A}_k - \partial_k \mathbf{A}_i$ ausdrücken läßt. Für $\nu = 3$ wird sie durch die Hodge-Transformation auf den Vektor \mathbf{B} abgebildet. Für $\nu = 2$ erhält man den Skalar $B = \partial_1 \mathbf{A}_2 - \partial_2 \mathbf{A}_1$, und eindimensionale Magnetfelder verschwinden.

Wir wollen die inverse Streutheorie der Dirac-Gleichung mit $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ und $V = A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}$ untersuchen. Welche Forderungen sollen wir dazu an A_0 und \mathbf{A} stellen? Da \mathbf{E} und \mathbf{B} die physikalisch interessanten Größen sind, sind in erster Linie differenzierbare A_0 und \mathbf{A} interessant. Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist die Aussage, daß sich ein elektromagnetisches Feld eindeutig aus der S -Matrix des Dirac-Operators rekonstruieren läßt (Satz 7.7). Hierfür benötigen wir lediglich die Stetigkeit und nicht die Differenzierbarkeit der A_i .

Wesentlich ist jedoch die Kurzreichweitigkeit der Potentiale, das heißt: Wir fordern $h(R) = \max_{|\mathbf{x}| \geq R} |A_i(\mathbf{x})| \in L^1([0, \infty))$, was im folgenden als integrierbarer Abfall bezeichnet wird. Die transversale Eichung ist in der Streutheorie beliebt, weil man mit ihr auch im Fall eines langreichweitigen Magnetfeldes die unmodifizierten Wellenoperatoren verwenden kann. Das transversal geeichte Vektorpotential ist allerdings auch dann i.a. nicht kurzreichweitig, wenn das Magnetfeld \mathbf{B} so gutartig ist, daß ein kurzreichweitiges \mathbf{A} existiert. Hier ist die Coulomb-Eichung besser:

Lemma 2.11 (Abfall des Vektorpotentials) Sei $\nu = 3$ und \mathbf{A} das Vektorpotential in der Coulomb-Eichung zu gegebenem Magnetfeld \mathbf{B} oder Strom \mathbf{j} . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \in C_0^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) &\Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|^3) \\ \mathbf{j} \in C_0^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) &\Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|^2)\end{aligned}$$

In beiden Fällen ist also \mathbf{A} kurzreichweitig, außerdem gilt $\mathbf{A} \in L^2$.

Beweis: Analog zum Biot-Savartschen Gesetz gilt

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \times \mathbf{B}(\mathbf{y}).$$

Es ist $\int_{\mathcal{F}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0$ für jede geschlossene Fläche \mathcal{F} und jede Ebene. Mit Fubini folgt $\int d^3y \mathbf{B}(\mathbf{y}) = 0$, und mit

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{4\pi|\mathbf{x}|^3} \times \int d^3y \mathbf{B}(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|^3)$$

ergibt sich die erste Behauptung. Für \mathbf{j} gilt analog $\int d^3y \mathbf{j}(\mathbf{y}) = 0$. Mit

$$-\Delta \mathbf{A} = \text{rot rot } \mathbf{A} - \text{grad div } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j} \quad \text{folgt}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \mathbf{j}(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \int d^3y \mathbf{j}(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|^2)$$

und damit die zweite Aussage. ■

Sei \mathbf{A} ein Vektorpotential zu $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Dann gilt für $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\lambda$ ebenfalls $\mathbf{B} = \text{rot } \tilde{\mathbf{A}}$. Das Vektorpotential ist keine meßbare physikalische Größe und ist durch \mathbf{B} nur bis auf Eichfreiheit bestimmt. Sind andererseits $\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}$ gegeben mit $\text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \tilde{\mathbf{A}}$, so existiert ein λ mit $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\lambda$. Das folgende Lemma berücksichtigt hierbei die Abfalleigenschaften von $\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}$ und λ :

Lemma 2.12 (Eichfreiheit des Vektorpotentials)

Seien \mathbf{A} und $\tilde{\mathbf{A}} \in C^0(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R}^\nu)$ mit integrierbarem Abfall und $\text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \tilde{\mathbf{A}}$ in \mathcal{S}' . Dann gibt es $\lambda \in C^1(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R})$ mit $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\lambda$ und $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \lambda(\mathbf{x}) = 0$.

Beweis: Für $h(R) = \max_{|\mathbf{x}| \geq R} |\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x})|$ gilt: h ist monoton fallend und integrierbar. Daher ist $h(R) = o(1/R)$, denn anderenfalls gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge von $x_n \in (0, \infty)$ mit $x_n h(x_n) \geq \varepsilon$ und $x_{n+1} \geq 2x_n$. Sei \tilde{h} stückweise konstant mit $\tilde{h}(x) = \varepsilon/x_{n+1}$ für $x_n < x < x_{n+1}$. Dann ist $\tilde{h}(x) \leq h(x)$, aber

$$\int_{x_1}^{\infty} dx h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} = \infty$$

im Widerspruch zu $h \in L^1$. Wähle nun $\lambda \in C^1(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R})$ mit $\text{grad } \lambda = \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}$. Wir zeigen, daß $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \lambda(\mathbf{x})$ existiert, er kann dann zu 0 gewählt werden. Sei $|\mathbf{x}_1| \geq R$ und $|\mathbf{x}_2| \geq R$, dann gilt $\lambda(\mathbf{x}_2) - \lambda(\mathbf{x}_1) = \int_C (\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{x}$, wobei die Kurve C aus den Strecken $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 R/|\mathbf{x}_1|]$ sowie $[\mathbf{x}_2 R/|\mathbf{x}_2|, \mathbf{x}_2]$ und einem Kreisbogen mit Radius R besteht, und wir erhalten

$$|\lambda(\mathbf{x}_2) - \lambda(\mathbf{x}_1)| \leq 2 \int_R^\infty dr h(r) + \pi R h(R) \rightarrow 0 .$$

Mit dem Konvergenzkriterium von Cauchy folgt, daß $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \lambda(\mathbf{x})$ existiert. ■

2.4 Kompakte Magnetfelder

Bei zweidimensionalen Magnetfeldern kann $\int B \neq 0$ sein. Sie sind physikalisch interessant, weil man dreidimensionale Magnetfelder, die in einer Richtung über eine lange Strecke konstant sind, wie das Feld einer Spule, durch ein zweidimensionales Feld annähern will. Beim Aharonov-Bohm-Experiment [1] werden Elektronen vom Magnetfeld einer langen Spule gestreut. In der Mittelebene erhält man in der Coulomb-Eichung $|\mathbf{A}(\mathbf{x})| \approx c \frac{a}{r\sqrt{a^2 + r^2}}$ außerhalb der Spule, wobei diese die Länge $2a$ hat und r der Abstand zur Achse ist. \mathbf{j} hat einen kompakten Träger, und es gilt $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|^2)$ in Übereinstimmung mit Lemma 2.11. Die Elektronen fliegen jedoch durch den Bereich $r \ll a$, dort ist $|\mathbf{A}| \approx c/r$. Wir wollen dies durch ein zweidimensionales Magnetfeld modellieren („unendlich lange Spule“). Dann gilt aber für den Fluß $\Phi = \int B \neq 0$, und daher kann kein kurzreichweitiges \mathbf{A} mit $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ existieren, denn aus $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = o(1/|\mathbf{x}|)$ folgt $\int B = 0$. Unsere Aussagen über den Hochenergielimes von S werden in Abschnitt 7.4 auf $B \in C_0^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ verallgemeinert, und die Rekonstruktion des elektromagnetischen Feldes ist zumindest für $B \in C_0^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ möglich.

Definition 2.13 (Kompakte Magnetfelder) *Wir definieren:*

1. $B \in C_0^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ heißt kompaktes Magnetfeld.
2. $\mathbf{A} \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $\text{rot } \mathbf{A} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = B$ in \mathcal{S}' heißt zulässiges Vektorpotential, wenn $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|)$ gilt und $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ integrierbar abfällt.

A ist im allgemeinen nicht stetig differenzierbar, lediglich $\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ ist stetig. Daß diese Definition zulässiger Vektorpotentiale sinnvoll ist, zeigt das folgende

Lemma 2.14 (Vektorpotentiale zu kompakten Magnetfeldern) *Es gilt:*

1. Sei B ein kompaktes Magnetfeld, dann existiert ein zulässiges \mathbf{A} mit $\text{rot } \mathbf{A} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = B$.
2. Ist auch $\tilde{\mathbf{A}}$ zulässig mit $\text{rot } \tilde{\mathbf{A}} = B$, so gibt es ein $\lambda \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \lambda$. $\Lambda(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r\mathbf{x})$ existiert und ist stetig und homogen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Beweis: 1. In der Coulomb-Eichung gilt

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2\pi|\mathbf{x}|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} * B, \quad \text{also} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|^2)$$

mit dem Fluß $\Phi = \int B$. Damit ist \mathbf{A} zulässig. In der transversalen Eichung ist

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \int_0^1 ds \, sB(\mathbf{x}s), \quad \text{also} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = 0.$$

Sei $|B(\mathbf{x})| \leq M$ und $\text{supp } B \subset B_R(0)$, dann gilt für $|\mathbf{x}| \geq R$:

$$|\mathbf{A}(\mathbf{x})| \leq |\mathbf{x}| \int_0^{R/|\mathbf{x}|} ds \, sM = \frac{MR^2}{2|\mathbf{x}|},$$

also $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|)$. Damit ist auch das transversal geeichte Vektorpotential zulässig.

2. Definiere $\lambda(\mathbf{x}) = \int_{[0, \mathbf{x}]} (\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{y}$ und $h(R) = \max_{|\mathbf{x}| \geq R} |(\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}| / |\mathbf{x}|$, dann ist h integrierbar, und für $|\mathbf{x}| \geq \delta > 0$ und $r_2 \geq r_1 \geq R$ gilt

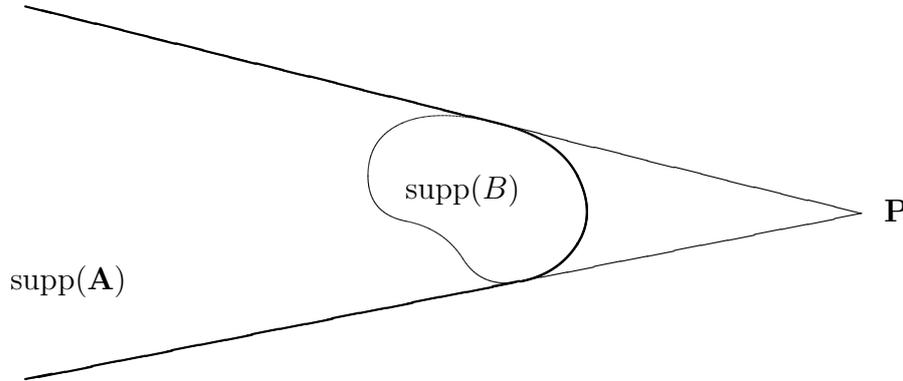
$$|\lambda(r_2\mathbf{x}) - \lambda(r_1\mathbf{x})| \leq \int_{r_1|\mathbf{x}|}^{r_2|\mathbf{x}|} dr \, h(r) \leq \int_{\delta R}^{\infty} dr \, h(r) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

Nach Cauchy existiert $\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r\mathbf{x}) =: \Lambda(\mathbf{x})$. Die Konvergenz ist gleichmäßig in \mathbf{x} mit $|\mathbf{x}| \geq \delta$, daher ist Λ stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Λ ist offenbar homogen und daher i.a. nicht stetig in 0. ■

Zu beliebigem $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$ kann man auch die verschobene transversale Eichung

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} p_2 - x_2 \\ x_1 - p_1 \end{pmatrix} \int_0^1 ds \, sB(\mathbf{x}s + \mathbf{P}(1-s))$$

betrachten. Dieses \mathbf{A} ist ebenfalls zulässig, und durch geschickte Wahl des Bezugspunktes \mathbf{P} kann man erreichen, daß der Träger von \mathbf{A} in einem schmalen Sektor liegt, was wir durch die folgende Zeichnung veranschaulichen:



Eine solche Eichung wird in [2, 3] zur Untersuchung der Schrödinger-Gleichung mit kompaktem Magnetfeld verwendet. Wir werden mit ihr den Satz 4.13 beweisen und damit in Abschnitt 7.4 kompakte Magnetfelder aus der S -Matrix des Dirac-Operators rekonstruieren.

2.5 Die X-Ray-Transformation

Definition 2.15 (X-Ray-Transformation) Sei $\nu \geq 2$ und $V : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit $h(R) = \max_{|\mathbf{x}| \geq R} |V(\mathbf{x})| \in L^1$. Dann ist die X-Ray-Transformierte von V definiert durch

$$\begin{aligned} \tilde{V} &: \mathbb{R}^\nu \times S^{\nu-1} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \tilde{V}(\mathbf{x}, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt V(\mathbf{x} + \omega t) . \end{aligned}$$

Der Name X-Ray-Transformation, also Röntgentransformation, beruht auf Anwendungen in der Computertomographie. Die X-Ray-Transformation wird in [19] für $V \in \mathcal{S}$ untersucht. Für $\nu = 2$ stimmt sie mit der Radon-Transformation überein, bei der über Hyperflächen integriert wird.

\mathbf{x} besitzt bezüglich ω die eindeutige Zerlegung $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\parallel + \mathbf{x}^\perp$ mit $\mathbf{x}^\perp \cdot \omega = 0$.

Satz 2.16 (Rekonstruktion von V aus der X-Ray-Transformierten)

Unter den Voraussetzungen von Definition 2.15 gilt:

1. \tilde{V} ist stetig auf $\mathbb{R}^\nu \times S^{\nu-1}$.
2. \tilde{V} ist konstant bezüglich \mathbf{x}^\parallel und gerade bezüglich ω .
3. Es gilt $\lim_{|\mathbf{x}^\perp| \rightarrow \infty} \tilde{V}(\mathbf{x}, \omega) = 0$.

4. Die Abbildung $V \mapsto \tilde{V}$ ist injektiv, damit läßt sich V aus \tilde{V} eindeutig rekonstruieren.

Beweis:

1. Wir betrachten $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$, $\omega_n \rightarrow \omega$. Für große n und $|t|$ gilt die Abschätzung $|V(\mathbf{x}_n + \omega_n t)| \leq h(|t| - |\mathbf{x}| - 1)$. Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz erhalten wir $\tilde{V}(\mathbf{x}_n, \omega_n) \rightarrow \tilde{V}(\mathbf{x}, \omega)$.

2. Eine Änderung von \mathbf{x}^\parallel entspricht einer Translation in t , und die Spiegelung von ω entspricht der Spiegelung von t . Daher bleibt das Integral invariant.

3. Ohne Einschränkung sei $\mathbf{x}^\parallel = 0$. Mit

$$|\mathbf{x}^\perp + \omega t| = \sqrt{(\mathbf{x}^\perp)^2 + t^2} \geq (|\mathbf{x}^\perp| + |t|)/\sqrt{2} \quad \text{folgt}$$

$$|\tilde{V}(\mathbf{x}^\perp, \omega)| \leq 2 \int_0^\infty dt h((|\mathbf{x}^\perp| + |t|)/\sqrt{2}) \rightarrow 0 \quad (|\mathbf{x}^\perp| \rightarrow \infty)$$

nach dem Satz über majorisierte Konvergenz.

4. Wir definieren

$$W(\mathbf{x}) = \int_{S^{\nu-1}} d\omega \tilde{V}(\mathbf{x}, \omega) = 2 \int_0^\infty dt \int_{S^{\nu-1}} d\omega V(\mathbf{x} + \omega t)$$

und betrachten (t, ω) als Polarkoordinaten des \mathbb{R}^ν gemäß $\mathbf{y} = \omega t$.

Mit $d^\nu y = t^{\nu-1} dt d\omega$ folgt

$$W(\mathbf{x}) = 2 \int d^\nu y \frac{V(\mathbf{x} + \mathbf{y})}{|\mathbf{y}|^{\nu-1}} = 2 \int d^\nu y \frac{V(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{y}|^{\nu-1}}, \quad \text{also} \quad W = \frac{2}{|\cdot|^{\nu-1}} * V.$$

Nach [18, p. 194] gilt $(|\mathbf{x}|^{-\alpha})^\wedge = 2^{\nu/2-\alpha} \Gamma((\nu - \alpha)/2) / \Gamma(\alpha/2) |\mathbf{p}|^{-\alpha-\nu}$ in \mathcal{S}' für $\alpha \neq \nu, \nu + 2, \dots$. Damit folgt für $V \in \mathcal{S}$:

$$\hat{W}(\mathbf{p}) = \frac{4\pi^{\frac{\nu+1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})} \frac{1}{|\mathbf{p}|} \hat{V}(\mathbf{p}).$$

Dies entspricht [19, Theorem 2.27], und damit läßt sich V aus W und damit aus \tilde{V} rekonstruieren. Zur Verallgemeinerung dieser Aussage auf ein integrierbar abfallendes, stetiges V können wir uns auf den Fall $\nu = 2$ beschränken, da es genügt, die Einschränkung von V auf eine beliebige Ebene zu rekonstruieren. Wegen der Linearität brauchen wir nur $W = 0 \Rightarrow V = 0$ zu zeigen. Sei also $\int d^2 y \frac{V(\mathbf{x} + \mathbf{y})}{|\mathbf{y}|} = 0$. Die Formel $f * g = 2\pi(\hat{f}\hat{g})^\vee$ gilt beispielsweise für $f, g \in L^2$ oder für $f \in L^1, g \in L^2$. Unter unseren Voraussetzungen ist $V \in L^2$, aber $|\mathbf{x}|^{-1} \notin L^1 + L^2$. Wir verwenden daher das folgende Approximationsargument: Es gilt nach dem Satz über majorisierte Konvergenz, angewandt auf $\langle |\mathbf{x}|^{-1-\varepsilon} * V, \varphi \rangle$ mit $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}' - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{1+\varepsilon}} * V = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{|\mathbf{x}|^{1+\varepsilon}} \in L^1 + L^2.$$

Da die Fouriertransformation für temperierte Distributionen stetig ist, folgt (der ε -abhängige Vorfaktor kann weggelassen werden)

$$\mathcal{S}' - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbf{p}|^{1-\varepsilon}} \hat{V}(\mathbf{p}) = 0 ,$$

und damit $\hat{V}(\mathbf{p})/|\mathbf{p}| = 0$ f.ü., also $V = 0$. ■

Bei der Dirac-Gleichung mit Magnetfeld (und ebenso bei der Schrödinger-Gleichung [2, 3]) erhält man $\int_{-\infty}^{+\infty} dt \omega \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x} + \omega t) dt$ aus der S-Matrix. Der folgende Satz zeigt, daß man damit \mathbf{A} bis auf Eichinvarianz rekonstruieren kann. Dies ist zunächst überraschend, da man gewissermaßen eine $(\nu - 1)$ -komponentige Funktion aus einer einkomponentigen erhält. Allerdings ist die X-Ray-Transformierte einer einkomponentigen Funktion im Vergleich hierzu auch entsprechend überbestimmt. Für die Rekonstruktion in Satz 2.16 genügt die Kenntnis von $\tilde{V}(\mathbf{x}, \omega)$ für ω aus einem zweidimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^ν .

Satz 2.17 (Rekonstruktion des Magnetfeldes) *Sei $\nu \geq 2$, $\mathbf{A} : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}^\nu$ stetig, $h(R) = \max_{|\mathbf{x}| \geq R} |\mathbf{A}(\mathbf{x})| \in L^1$, ferner gelte $\mathbf{A} \in L^2$. Dann gilt für die Abbildung $a : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \omega \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x} + \omega t)$:*

1. *a ist stetig auf $\mathbb{R}^\nu \times S^{\nu-1}$.*
2. *a ist konstant bezüglich \mathbf{x}^\parallel und ungerade bezüglich ω .*
3. *Es gilt $\lim_{|\mathbf{x}^\perp| \rightarrow \infty} a(\mathbf{x}, \omega) = 0$.*
4. *A ist durch a in folgendem Sinne bis auf Eichfreiheit bestimmt:*

$$a = a' \iff \exists \lambda \in C^1(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R}) \text{ mit } \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \lambda(\mathbf{x}) = 0 \text{ und } \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda .$$

5. *In der Coulomb-Eichung ist A durch a eindeutig bestimmt.*

Die zusätzliche Voraussetzung $\mathbf{A} \in L^2$ ist für $\nu = 2$ keine Einschränkung, wohl aber für $\nu = 3$. Sie ist jedoch erfüllt, wenn \mathbf{B} oder \mathbf{j} einen kompakten Träger hat (Lemma 2.11). Unser Beweis läßt sich auf $\hat{\mathbf{A}} \in L^p$ für ein p mit $3/2 < p \leq 2$ verallgemeinern, dies stellt immer noch eine gewisse Einschränkung dar. Das Rekonstruktionsverfahren von Ito [20, Lemma 3.4] läßt sich anwenden auf $\mathbf{A} \in C^1$, wobei $\partial_i A_k$ integrierbar abfällt. Vergleiche dazu Satz 2.18.

Beweis: 1., 2. und 3. ergeben sich wie bei Satz 2.17.

4. „ \Leftarrow “: Es gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \omega \cdot \nabla \lambda(\mathbf{x} + \omega t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} \lambda(\mathbf{x} + \omega t) = 0 .$$

„ \Rightarrow “: Wir wollen den Beweis von Satz 2.16 übertragen. Dazu liegt es nahe, das Integral von $\omega a(\mathbf{x}, \omega)$ zu betrachten, da der Integrand bezüglich ω gerade ist. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}) &= \int_{S^{\nu-1}} d\omega \omega a(\mathbf{x}, \omega) = 2 \int_0^\infty dt \int_{S^{\nu-1}} d\omega \omega \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x} + \omega t) \\ &= 2 \int d^\nu y \frac{\mathbf{y} \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y})}{|\mathbf{y}|^{\nu+1}} = 2 \frac{\mathbf{x} \mathbf{x}^T}{|\mathbf{x}|^{\nu+1}} * \mathbf{A} . \end{aligned}$$

Für $\mathbf{A} \in \mathcal{S}$ folgt hieraus

$$\hat{W}(\mathbf{p}) = \frac{2\pi^{\frac{\nu+1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \frac{1}{|\mathbf{p}|} \left(1 - \frac{\mathbf{p} \mathbf{p}^T}{|\mathbf{p}|^2}\right) \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) \quad (2.1)$$

und $W = 0$ ergibt $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \frac{\hat{\Lambda}}{|\mathbf{p}|^2}$, also $\mathbf{A} = \nabla \lambda$. Dies wollen wir auf ein stetiges $\mathbf{A} \in L^2$ mit integrierbarem Abfall verallgemeinern. Für $\nu > 2$ bleibt (2.1) wegen $\frac{\mathbf{x} \mathbf{x}^T}{|\mathbf{x}|^{\nu+1}} \in L^1 + L^2$ gültig. Für $\nu = 2$ verwenden wir das Approximationsargument aus dem Beweis von Satz 2.16.

5. Wenn \mathbf{A} in der Coulomb-Eichung (d.h. $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ in \mathcal{S}') kurzreichweitig ist, dann ist es nach 4. durch a eindeutig bestimmt, denn aus $\Delta \lambda = 0$ und $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \lambda(\mathbf{x}) = 0$ folgt $\lambda = 0$. Man kann \mathbf{A} auch folgendermaßen direkt rekonstruieren: Für $\nu > 2$ ist $\hat{W}(\mathbf{p}) = \frac{2\pi^{\frac{\nu+1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \frac{1}{|\mathbf{p}|} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p})$. Für $\nu = 2$ gilt $(-A_2, A_1)^T = \nabla \mu$ mit $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mu(\mathbf{x}) = 0$. Daher ist $\int_{-\infty}^{+\infty} dt (\omega_2 A_1 - \omega_1 A_2)(\mathbf{x} + \omega t) = 0$ und man erhält

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathbf{A}(\mathbf{x} + \omega t) = \omega \int_{-\infty}^{+\infty} dt \omega \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x} + \omega t) .$$

Daraus lassen sich die Komponenten von \mathbf{A} mit Satz 2.16 rekonstruieren. ■

Die zweidimensionalen kompakten Magnetfelder lassen sich nicht mit Satz 2.17 rekonstruieren. Der folgende Satz ist durch Lemma 3.4 in [20] motiviert, wobei Ito allerdings eine Darstellung mittels Fouriertransformation unter stärkeren Voraussetzungen verwendet. Wir betrachten nur $\nu = 2$, der Fall $\nu \geq 3$ läßt sich durch Einschränkung auf Ebenen analog behandeln.

Satz 2.18 (Rekonstruktion von B für $\nu = 2$)

Das Vektorpotential $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ erfülle eine der folgenden Voraussetzungen:

1. Es gelte $\mathbf{A} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0$. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} / |\mathbf{x}|$ falle integrierbar ab und $\partial_i A_k$ habe ebenfalls integrierbaren Abfall für $i, k = 1, 2$.
2. Es sei $B \in C_0^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $\mathbf{A} \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $\operatorname{rot} \mathbf{A} = B$ (in \mathcal{S}'). Es gelte $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|)$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} / |\mathbf{x}|$ falle integrierbar ab.

Dann läßt sich B folgendermaßen aus $a(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \omega \mathbf{A}(\mathbf{x} + \omega t)$ rekonstruieren: Sei ϖ der gegenüber ω um -90° gedrehte Einheitsvektor, also $\varpi = (\omega_2, -\omega_1)^T$. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt B(\varpi s + \omega t) = \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \omega \cdot \mathbf{A}(\varpi s + \omega t) .$$

Somit erhält man die X-Ray-Transformierte von B und mit Satz 2.16 schließlich B selbst.

Die Voraussetzungen sind relativ stark: In 1. sollen alle $\partial_i A_k$ integrierbar abfallen, und in 2. betrachten wir nicht $B \in C_0^0(\mathbb{R}^2)$ wie bisher, sondern nur $B \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$.

Beweis: Ohne Einschränkung können wir das Koordinatensystem so wählen, daß $\omega = (0, 1)^T$ und $\varpi = (1, 0)^T$ gilt.

Unter den Voraussetzungen 1. ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt B(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \partial_1 A_2(s, t) ,$$

denn aus $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0$ folgt $\int_{-\infty}^{+\infty} dt \partial_2 A_2(s, t) = 0$. Aus dem integrierbaren Abfall von $\partial_1 A_2$ folgt mit dem Satz über majorisierte Konvergenz, daß wir Integration und Differentiation vertauschen dürfen. Hierfür genügt es nicht, daß $\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ integrierbar abfällt.

Unter den Voraussetzungen 2. betrachten wir zunächst eine spezielle Eichung. Wegen $B \in C^1$ ist das transversal geeichte Vektorpotential stetig differenzierbar und in einer geeignet verschobenen transversalen Eichung \mathbf{A}^t verschwindet $\mathbf{A}_2^t(s, t)$ für große $|t|$, so daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt B(s, t) = \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{+\infty} dt A_2^t(s, t)$$

folgt. Es gibt ein λ mit $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t + \nabla \lambda$, und mit Λ gemäß Lemma 2.14 ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt A_2(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt A_2^t(s, t) + \Lambda(0, 1) - \Lambda(0, -1) ,$$

daher ist die Ableitung nach s dieselbe. ■

Diese Idee werden wir auch bei der Bestimmung des Hochenergielimes von S in Abschnitt 7.4 anwenden. Wir beweisen die entsprechende Formel zuerst in einer speziellen Eichung und zeigen dann, daß sie beim Wechsel der Eichung gültig bleibt, da sich beide Seiten der betreffenden Gleichung in derselben Weise verändern.

Kapitel 3

Die freie Zeitentwicklung

In Abschnitt 1 stellen wir das Prinzip der nicht-stationären Phase vor. Die Abschnitte 2, 3 und 4 sind der freien Zeitentwicklung für $H_0 = |\mathbf{p}|^\alpha$, $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ und für den Dirac-Operator $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ gewidmet. In Abschnitt 5 betrachten wir die Foldy-Wouthuysen-Darstellung und den Newton-Wigner-Ortsoperator bei der Dirac-Gleichung. Die Abschnitte 2 und 3 sind sehr ähnlich aufgebaut, wurden jedoch der Übersichtlichkeit halber nicht zusammengefaßt.

3.1 Das Prinzip der nicht-stationären Phase

Sei $E : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$ und $H_0 = E(\mathbf{p})$. Dann gilt unter geeigneten Voraussetzungen

$$\begin{aligned} (e^{-iH_0 t} \Psi)(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-\frac{\nu}{2}} \int dp e^{i(\mathbf{p}\mathbf{x} - E(\mathbf{p})t)} \hat{\psi}(\mathbf{p}) \\ &= (2\pi)^{-\frac{\nu}{2}} \int dp e^{itf(\mathbf{p})} \hat{\psi}(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

mit $f(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}/t - E(\mathbf{p})$. Gemäß der Hamiltonschen Mechanik ist die Geschwindigkeit gegeben durch $\mathbf{Q} = \nabla E(\mathbf{p})$. Nach dem Prinzip der stationären Phase erhält man für $|t| \rightarrow \infty$ die größten Beiträge zu dem Integral für $\nabla f = 0$, also $\mathbf{x}/t = \mathbf{Q}$. Dies entspricht der klassischen Zeitentwicklung $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{Q}t$. Gilt andererseits $\mathbf{x}/t \neq \nabla E(\mathbf{p})$ für $\mathbf{p} \in \text{supp}(\hat{\psi})$, so ist $(e^{-iH_0 t} \Psi)(\mathbf{x})$ klein. Diese Idee wird im folgenden Satz präzisiert. Dabei dürfen f und $\hat{\psi}$ noch von weiteren Parametern abhängen, da wir den Satz später auf $e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi$ anwenden wollen. Die Beweisidee stammt aus [35, Theorem 1.8], ein anderer Beweis wird in [30, Theorem XI.14] gegeben. Wir fassen die Parameter in einer Variablen a zusammen.

Satz 3.1 (Methode der nicht-stationären Phase) *Sei $G \subset \mathbb{R}^\nu$ offen und beschränkt, und für $a \in A$ seien $f_a \in C^\infty(G, \mathbb{R})$ und $g_a \in C_0^\infty(G, \mathbb{C})$. Es gel-*

te

$$\sup_{\mathbf{p} \in G, a \in A} |\partial_{\mathbf{p}}^{\beta} f_a(\mathbf{p})| < \infty \text{ für } |\beta| \geq 1 \text{ und } \sup_{\mathbf{p} \in G, a \in A} |\partial_{\mathbf{p}}^{\gamma} g_a(\mathbf{p})| < \infty \text{ für } |\gamma| \geq 0.$$

Ferner gebe es ein $\varepsilon > 0$ mit $|\nabla_{\mathbf{p}} f_a(\mathbf{p})| \geq \varepsilon$ für $\mathbf{p} \in G$, $a \in A$. Dann gilt für

$$h_a(t) = \int d\mathbf{p} e^{itf_a(\mathbf{p})} g_a(\mathbf{p}) :$$

Zu $l \in \mathbb{N}$ existiert ein $c > 0$ so, daß

$$|h_a(t)| \leq \frac{c}{(1+|t|)^l} \text{ für } t \in \mathbb{R}, a \in A \text{ gilt.}$$

Beweis: Wir betrachten

$$\begin{aligned} t^l h_a(t) &= \int d\mathbf{p} \left\{ \left(-i \frac{\nabla f_a(\mathbf{p})}{|\nabla f_a(\mathbf{p})|^2} \cdot \nabla \right)^l e^{itf_a(\mathbf{p})} \right\} g_a(\mathbf{p}) \\ &= \int d\mathbf{p} e^{itf_a(\mathbf{p})} \left(i \nabla \cdot \frac{\nabla f_a(\mathbf{p})}{|\nabla f_a(\mathbf{p})|^2} \right)^l g_a(\mathbf{p}) \\ \Rightarrow |t^l h_a(t)| &\leq \int d\mathbf{p} \left| \left(i \nabla \cdot \frac{\nabla f_a(\mathbf{p})}{|\nabla f_a(\mathbf{p})|^2} \right)^l g_a(\mathbf{p}) \right| \end{aligned}$$

$$\text{Nun ist } \left(i \nabla \cdot \frac{\nabla f_a(\mathbf{p})}{|\nabla f_a(\mathbf{p})|^2} \right)^l g_a(\mathbf{p}) = \left(\sum_{0 \leq |\gamma| \leq l} P_{\gamma}(\partial^{\beta} f_a) \partial^{\gamma} g_a \right) / |\nabla f_a|^{4l}$$

mit geeigneten Polynomen P_{γ} in den Variablen $\partial^{\beta} f_a$ mit $1 \leq |\beta| \leq l+1$. Nach Voraussetzung sind diese Polynome und die Ableitungen von g_a auf $A \times G$ beschränkt, also ist $|\sum_{0 \leq |\gamma| \leq l} P_{\gamma} \partial_{\mathbf{p}}^{\gamma} g_a| \leq c'$ und damit

$$|t^l h_a(t)| \leq |G| c' / \varepsilon^{4l} =: c'', \text{ also } |h_a(t)| \leq c'' / |t|^l$$

für $t \neq 0$. Wegen $|h_a(t)| \leq c'''$ gibt es ein $c > 0$ mit

$$|h_a(t)| \leq \frac{c}{(1+|t|)^l} \text{ für } t \in \mathbb{R}, a \in A. \quad \blacksquare$$

3.2 Die freie Zeitentwicklung zu $H_0 = |\mathbf{p}|^{\alpha}$

Wir betrachten den freien Hamiltonoperator $H_0 = |\mathbf{p}|^{\alpha}$ mit $\alpha > 1$ im Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{\nu}, \mathbb{C}^{\mu})$. H_0 ist selbstadjungiert mit $D(H_0) = \{\Psi \in \mathcal{H} \mid |\mathbf{p}|^{\alpha} \hat{\psi}(\mathbf{p}) \in L^2\}$. Der zugehörige Geschwindigkeitsoperator ist $\mathbf{Q} = \alpha |\mathbf{p}|^{\alpha-2} \mathbf{p}$, er ist ebenfalls unbeschränkt. Die freie Zeitentwicklung $e^{-iH_0 t}$ ist nach dem Satz von Stone unitär. Der folgende Satz wird zum Beweis einer Abschätzung für $V e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}} \Psi$ benötigt (Satz 4.5). Dabei wird Ψ durch $(\mathbf{p}^2 + 1)^{\alpha/2} \Psi$ ersetzt, das dieselben Voraussetzungen erfüllt. Für große v ist die Wellenfunktion zur Zeit t bei $\alpha v^{\alpha-1} \omega t$ konzentriert. Daher ist es sinnvoll, die zurückgelegte Strecke $\tau = \alpha v^{\alpha-1} t$ als neue Variable einzuführen.

Satz 3.2 (Abschätzung der freien Zeitentwicklung zu $H_0 = |\mathbf{p}|^\alpha$)

Sei $H_0 = |\mathbf{p}|^\alpha$ mit $\alpha > 1$, $\Psi \in \mathcal{H}$ mit $\hat{\psi} \in C_0^\infty$, $\mathbf{v} = v\omega$ mit $\omega \in S^{\nu-1}$. Dann gibt es zu $l \in \mathbb{N}$ Konstanten c , $v_0 > 0$ so, daß

$$\left| \left(e^{-i\frac{H_0}{\alpha v^{\alpha-1}}\tau} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \right) (\mathbf{x}) \right| \leq \frac{c}{(1+|\tau|)^l} \text{ für } |\mathbf{x}| \leq |\tau|/2, \quad v \geq v_0. \quad (3.1)$$

Beweis: Es gilt

$$\left| \left(e^{-i\frac{H_0}{\alpha v^{\alpha-1}}\tau} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \right) (\mathbf{x}) \right| = \left| \left(e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} e^{-i\frac{H_0}{\alpha v^{\alpha-1}}\tau} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \right) (\mathbf{x}) \right| = \left| \left(e^{-i\frac{|\mathbf{p}+\mathbf{v}|^\alpha}{\alpha v^{\alpha-1}}\tau} \Psi \right) (\mathbf{x}) \right|$$

$$\text{und } \left(e^{-i\frac{|\mathbf{p}+\mathbf{v}|^\alpha}{\alpha v^{\alpha-1}}\tau} \Psi \right) (\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{\nu}{2}} \int d\mathbf{p} e^{i\tau f_a(\mathbf{p})} \hat{\psi}(\mathbf{p})$$

$$\text{mit } f_a(\mathbf{p}) = \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / \tau - \frac{|\mathbf{p} + \mathbf{v}|^\alpha}{\alpha v^{\alpha-1}} \right), \quad a = (\mathbf{x}/\tau, \omega, v).$$

Der Parameter a ist in $A = \bar{B}_{1/2}(0) \times S^{\nu-1} \times [v_0, \infty)$, ferner setzen wir $G = B_R(0) \supset \text{supp}(\hat{\psi})$. Zu zeigen ist: Für geeignetes $v_0 > R$ erfüllt f_a die Voraussetzungen von Satz 3.1, d.h. auf $A \times G$ ist $|\nabla f_a|$ nach unten und $\partial^\beta f_a$ für $|\beta| \geq 1$ nach oben beschränkt. Setze $\mathbf{q} = \mathbf{x}/\tau$. Mit $|\mathbf{q}| \leq 1/2$ folgt

$$\begin{aligned} |\nabla f_a(\mathbf{p})| &= \left| \mathbf{q} - \frac{|\mathbf{p} + \mathbf{v}|^{\alpha-2}(\mathbf{p} + \mathbf{v})}{v^{\alpha-1}} \right| \geq \left| \omega + \frac{\mathbf{p}}{v} \right|^{\alpha-1} - 1/2 \\ &\geq \left(1 - \frac{R}{v_0} \right)^{\alpha-1} - 1/2 \geq \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

für $|\mathbf{p}| \leq R$ und $v \geq v_0$ mit $v_0 > R$ hinreichend groß. —Durch Einführung von $1/v$ als neuer Variable sieht man: ∇f_a und seine Ableitungen sind für $v \rightarrow \infty$ „stetig ergänzbar“, also stetig auf dem durch $|\mathbf{q}| \leq 1/2$, $|\mathbf{p}| \leq R$, $\omega \in S^{\nu-1}$, $v_0 \leq v \leq \infty$ gegebenen Kompaktum und damit beschränkt. Mit Satz 3.1 folgt die Behauptung. ■

3.3 Die freie Zeitentwicklung zu $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$

Der skalare relativistische Hamiltonoperator ist $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ mit $m \geq 0$. Dies entspricht dem relativistischen Ausdruck für die Gesamtenergie eines freien Teilchens der Masse m . Der zugrundeliegende Hilbertraum ist $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C}^\mu)$, und H_0 ist selbstadjungiert auf dem Sobolevraum $H^1(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C}^\mu)$. Der zugehörige Geschwindigkeitsoperator ist $\mathbf{Q} = \mathbf{p}/\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Er ist beschränkt durch 1 (Lichtgeschwindigkeit). Die freie Zeitentwicklung $e^{-iH_0 t}$ ist nach dem Satz von Stone unitär. Der folgende Satz wird zum Beweis einer Abschätzung für $V e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi$ benötigt (Satz 4.9). Dabei wird Ψ durch $\sqrt{\mathbf{p}^2 + 1} \Psi$ ersetzt, das dieselben Voraussetzungen erfüllt.

Satz 3.3 (Abschätzung der freien Zeitentwicklung zu $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$)
 Sei $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ mit $m \geq 0$, $\Psi \in \mathcal{H}$ mit $\hat{\psi} \in C_0^\infty$, $\mathbf{v} = v\omega$ mit $\omega \in S^{\nu-1}$.
 Dann gibt es zu $l \in \mathbb{N}$ Konstanten $c > 0$ und $v_0 > 0$ so, daß

$$\left| \left(e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \right) (\mathbf{x}) \right| \leq \frac{c}{(1+|t|)^l} \text{ für } |\mathbf{x}| \leq |t|/2, v \geq v_0. \quad (3.2)$$

Für $v \rightarrow \infty$ strebt die Geschwindigkeit gegen ω , daher ist das Wellenpaket bei ωt konzentriert, und für kleine $|\mathbf{x}|$ wird es für große $|t|$ beliebig klein. Der Beweis erfolgt mit dem Prinzip der nicht-stationären Phase.

Beweis: Es gilt

$$\left| \left(e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \right) (\mathbf{x}) \right| = \left| \left(e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \right) (\mathbf{x}) \right| = \left| \left(e^{-i\sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{v})^2 + m^2} t} \Psi \right) (\mathbf{x}) \right|$$

$$\text{und } \left(e^{-i\sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{v})^2 + m^2} t} \Psi \right) (\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{\nu}{2}} \int dp e^{itf_a(\mathbf{p})} \hat{\psi}(\mathbf{p})$$

$$\text{mit } f_a(\mathbf{p}) = \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / t - \sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{v})^2 + m^2} \right), a = (\mathbf{x}/t, \omega, v).$$

Der Parameter a ist in $A = \bar{B}_{1/2}(0) \times S^{\nu-1} \times [v_0, \infty)$, ferner setzen wir $G = B_R(0) \supset \text{supp}(\hat{\psi})$. Zu zeigen ist: Für geeignetes $v_0 > R$ erfüllt f_a die Voraussetzungen von Satz 3.1, d.h. auf $A \times G$ ist $|\nabla f_a|$ nach unten und $\partial^\beta f_a$ für $|\beta| \geq 1$ nach oben beschränkt. Setze $\mathbf{q} = \mathbf{x}/t$. Mit $|\mathbf{q}| \leq 1/2$ folgt

$$|\nabla f_a(\mathbf{p})| = \left| \mathbf{q} - \frac{\mathbf{p} + \mathbf{v}}{\sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{v})^2 + m^2}} \right| \geq \frac{|\mathbf{p} + \mathbf{v}|}{\sqrt{|\mathbf{p} + \mathbf{v}|^2 + m^2}} - 1/2.$$

Dieser Ausdruck ist monoton wachsend bezüglich $|\mathbf{p} + \mathbf{v}|$ und strebt gegen $1/2$, daher gilt für $|\mathbf{p}| \leq R$ und $v \geq v_0$ mit $v_0 > R$ hinreichend groß:

$$|\nabla f_a(\mathbf{p})| \geq \frac{v_0 - R}{\sqrt{(v_0 - R)^2 + m^2}} - 1/2 \geq \varepsilon > 0$$

Ferner sind ∇f_a und seine Ableitungen für $v \rightarrow \infty$ „stetig ergänzbar“, also stetig auf dem durch $|\mathbf{q}| \leq 1/2$, $|\mathbf{p}| \leq R$, $\omega \in S^{\nu-1}$, $v_0 \leq v \leq \infty$ gegebenen Kompaktum und damit beschränkt. Mit Satz 3.1 folgt die Behauptung. ■

3.4 Die freie Zeitentwicklung zur Dirac-Gleichung

Wir definieren zur Abkürzung $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ für die relativistische Gesamtenergie eines freien Teilchens mit der Ruhemasse m und dem Impuls \mathbf{p} . Der skalare Operator $H_0 = E$ wurde von Dirac verworfen, weil er sich schlecht in relativistisch-invarianter Weise an ein äußeres Feld koppeln läßt. (Vergleiche dazu die Diskussion in [34].) Die Klein-Gordon-Gleichung $-\ddot{\varphi} = E^2\varphi$ wird nach Separation

$$\Phi = \begin{pmatrix} E\varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \text{ zu } i\dot{\Phi} = H_0\Phi \text{ mit } H_0 = \begin{pmatrix} 0 & iE \\ -iE & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Sie wird auf Spin-0-Teilchen, etwa Pionen, angewandt. Zur Beschreibung des Elektronenspins machte Dirac den Ansatz

$$H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_\nu p_\nu + \beta m$$

mit selbstadjungierten Matrizen $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \beta \in \mathbb{C}^{\mu \times \mu}$. Dabei liegt der Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C}^\mu)$ zugrunde, und H_0 ist selbstadjungiert mit Definitionsbereich $H^1(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C}^\mu)$. Die Bedingung $H_0^2 = E^2$ führt auf die Vertauschungsrelationen

$$\{\alpha_i, \alpha_k\} = 0 \text{ für } i \neq k, \alpha_i^2 = \beta^2 = 1, \{\alpha_i, \beta\} = 0.$$

Dabei bezeichnet 1 die Identität in $\mathbb{C}^{\mu \times \mu}$ beziehungsweise \mathcal{H} , und $\{A, B\} = AB + BA$ den Antikommutator von A und B . Die Matrix $\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ hat die Eigenwerte $\pm E$, und es gilt $\sigma(H_0) = \sigma^{ac}(H_0) = (-\infty, -m] \cup [m, \infty)$. Die negativen Eigenwerte führten zur Vorhersage der Positronen. Darüberhinaus beschreibt die Diracgleichung $i\dot{\Psi} = H_0\Psi$ in natürlicher Weise Teilchen mit dem Spin 1/2. Die Komponenten des Spinors Ψ entsprechen bestimmten Vorzeichen von Energie und Spin. Aus den Vertauschungsrelationen folgt

$$\text{tr } \alpha_i = \text{tr } \beta \alpha_i \beta^{-1} = \text{tr } \beta \alpha_i \beta = -\text{tr } \beta^2 \alpha_i = -\text{tr } \alpha_i,$$

also $\text{tr } \alpha_i = 0$, analog $\text{tr } \beta = 0$ und somit $\text{tr } (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m) = 0$. Damit haben die Eigenwerte $\pm E$ dieselbe Vielfachheit, insbesondere ist μ gerade. Das Standardbeispiel ist $\nu = 3, \mu = 4$. Hierbei sind die Matrizen durch die Vertauschungsrelationen bis auf unitäre Äquivalenz festgelegt, eine übliche Darstellung ist (in Blockmatrix-Schreibweise)

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \text{ mit den Pauli-Matrizen}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ein weiteres Beispiel ist $H_0 = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$ für $\nu = 3, \mu = 2$. Bei diesem Weyl-Operator ist $m = 0$ und β nicht definiert.

Wegen $|H_0| = E$ sind $P_{\pm} = 1/2(1 \pm H_0/E)$ die orthogonalen Projektoren auf den positiven/negativen spektralen Teilraum \mathcal{H}_{\pm} zu H_0 . Für weitere Eigenschaften der Dirac-Gleichung und weitergehende Begründungen verweisen wir auf [5, 6, 26, 35]. Wir fassen die grundlegenden Definitionen zusammen in

Definition 3.4 (Dirac-Theorie)

Sei $m \geq 0, E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ und $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{\nu}, \mathbb{C}^{\mu})$. Die selbstadjungierten Matrizen $\alpha_1 \dots \alpha_{\nu} \in \mathbb{C}^{\mu \times \mu}$ erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$\{\alpha_i, \alpha_k\} = 0 \text{ für } i \neq k, \quad \alpha_i^2 = \beta^2 = 1, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0. \quad (3.4)$$

Der Dirac-Operator $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_{\nu} p_{\nu} + \beta m$ ist selbstadjungiert mit Definitionsbereich $H^1(\mathbb{R}^{\nu}, \mathbb{C}^{\mu})$. Er erfüllt $H_0^2 = E^2$, und $P_{\pm} = 1/2(1 \pm H_0/E)$ sind die orthogonalen Projektoren auf $\mathcal{H}_{\pm} = \mathcal{H}(H_0 = \pm E)$.

Das folgende Lemma gibt einen einfachen asymptotischen Ausdruck für die freie Zeitentwicklung im Grenzübergang $v \rightarrow \infty$:

Lemma 3.5 (Freie Zeitentwicklung der Dirac-Gleichung) *Es gilt*

$$\begin{aligned} 1) \quad & e^{-iH_0 t} = e^{-iEt} P_+ + e^{iEt} P_- \\ 2) \quad & s - \lim_{v \rightarrow \infty} \left(e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} - e^{-i\alpha\omega(v+\omega\mathbf{p})t} \right) = 0. \end{aligned}$$

Beweis: 1) P_{\pm} sind die Projektoren auf $\mathcal{H}(H_0 = \pm E)$.

2) Es gilt

$$e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} = e^{-i\sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{v})^2+m^2}t} \tilde{P}_+ + e^{i\sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{v})^2+m^2}t} \tilde{P}_-$$

$$\text{mit } \tilde{P}_{\pm} = 1/2 \left(1 \pm \frac{\alpha \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{v}) + \beta m}{\sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{v})^2 + m^2}} \right) \longrightarrow 1/2 (1 \pm \alpha \cdot \omega) \quad (v \rightarrow \infty)$$

punktweise bezüglich \mathbf{p} und stark in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ nach Lemma 2.2. Ferner gilt für festes $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\nu}$ die Asymptotik $\sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{v})^2 + m^2} = v + \omega\mathbf{p} + \mathcal{O}(1/v)$ und damit

$$\begin{aligned} s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{\mp i \left(\sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{v})^2+m^2} - v \right) t} &= e^{\mp i\omega\mathbf{p}t}. \quad \text{Mit Lemma 2.3 folgt} \\ s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{\mp i \left(\sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{v})^2+m^2} - v \right) t} \tilde{P}_{\pm} &= e^{\mp i\omega\mathbf{p}t} 1/2 (1 \pm \alpha \cdot \omega), \quad \text{also} \end{aligned}$$

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} \left(e^{-iv\mathbf{x}} e^{-iH_0 t} e^{iv\mathbf{x}} - \left(e^{-i(v+\omega\mathbf{p})t} 1/2 (1 + \alpha \cdot \omega) + e^{i(v+\omega\mathbf{p})t} 1/2 (1 - \alpha \cdot \omega) \right) \right) = 0 .$$

Nun sind $1/2 (1 \pm \alpha \cdot \omega)$ die Projektoren auf $\mathcal{H}(\alpha \cdot \omega = \pm 1)$, denn aus den Vertauschungsrelationen (3.4) folgt $(\alpha \cdot \omega)^2 = 1$. ■

Sei $\hat{\psi} \in C_0^\infty$. Dann ist $(e^{-iH_0 t} e^{iv\mathbf{x}} 1/2 (1 \pm \alpha \cdot \omega) \Psi)(\mathbf{x})$ für große v und $|t|$ bei $\mathbf{x} = \pm \omega t$ konzentriert. Daher ist die Wellenfunktion für kleine $|\mathbf{x}|$ klein, was im folgenden Satz präzisiert wird. Um für große v mit $e^{iv\mathbf{x}} \Psi$ einen Zustand positiver Energie zu erhalten, müßte man von einem Zustand Ψ mit $\alpha \cdot \omega \Psi = \Psi$ ausgehen, dieser hätte „gemischte“ Energie. Im nächsten Abschnitt betrachten wir den Newton-Wigner-Ortsoperator \mathbf{x}_{NW} , der im Unterschied zu \mathbf{x} die spektralen Teilräume \mathcal{H}_\pm invariant läßt. Ist $\hat{\psi} \in C_0^\infty$ ein Zustand positiver Energie, so bleibt $e^{-iH_0 t} e^{iv\mathbf{x}} \Psi$ ein solcher, und für große v und $|t|$ ist er bei $\mathbf{x} = \omega t$ konzentriert. Dies entspricht der freien Zeitentwicklung des skalaren relativistischen Hamiltonoperators. Mit \mathbf{x}_{NW} wird es möglich, den Hochenergielimes von $e^{-iv\mathbf{x}_{NW}} S_\pm e^{iv\mathbf{x}_{NW}}$ zu untersuchen, wobei S_\pm die Einschränkung von S auf \mathcal{H}_\pm ist.

Satz 3.6 (Abschätzung der freien Zeitentwicklung zum Dirac-Operator)

Sei $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ mit $m \geq 0$, $\Psi \in \mathcal{H}$ mit $\hat{\psi} \in C_0^\infty$, $\mathbf{v} = v\omega$ mit $\omega \in S^{\nu-1}$. Dann gibt es zu $l \in \mathbb{N}$ Konstanten $c, v_0 > 0$ so, daß

$$\left| (e^{-iH_0 t} e^{iv\mathbf{x}} \Psi)(\mathbf{x}) \right| \leq \frac{c}{(1 + |t|)^l} \text{ für } |\mathbf{x}| \leq |t|/2, v \geq v_0 . \quad (3.5)$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \left| (e^{-iH_0 t} e^{iv\mathbf{x}} \Psi)(\mathbf{x}) \right| &= \left| (e^{-iv\mathbf{x}} e^{-iH_0 t} (P_+ + P_-) e^{iv\mathbf{x}} \Psi)(\mathbf{x}) \right| \\ &\leq \left| (e^{-iv\mathbf{x}} e^{-iH_0 t} P_+ e^{iv\mathbf{x}} \Psi)(\mathbf{x}) \right| + \left| (e^{-iv\mathbf{x}} e^{-iH_0 t} P_- e^{iv\mathbf{x}} \Psi)(\mathbf{x}) \right| \\ \text{und } (e^{-iv\mathbf{x}} e^{-iH_0 t} P_+ e^{iv\mathbf{x}} \Psi)(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-\frac{\nu}{2}} \int d\mathbf{p} e^{itf_a(\mathbf{p})} g_a(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

$$\text{mit } f_a(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\mathbf{x}/t - \sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{v})^2 + m^2} \quad \text{und } g_a(\mathbf{p}) = 1/2 \left(1 + \frac{\alpha \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{v}) + \beta m}{\sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{v})^2 + m^2}} \right) \hat{\psi}(\mathbf{p}) .$$

Der Parameter $a = (\mathbf{x}/t, \omega, v)$ ist in $A = \bar{B}_{1/2}(0) \times S^{\nu-1} \times [v_0, \infty)$, ferner setzen wir $G = B_R(0) \supset \text{supp}(\hat{\psi})$. f_a wurde bereits im Beweis von Satz 3.3 untersucht, und g_a ist mit ihren Ableitungen beschränkt auf $A \times G$, da sie für $v \rightarrow \infty$ stetig ergänzbar sind. Mit Satz 3.1 folgt die Behauptung für den Anteil positiver Energie, der zweite wird analog behandelt. ■

Wir werden diesen Satz zum Beweis einer Abschätzung für $V e^{-iH_0 t} e^{iv\mathbf{x}} \Psi$ verwenden (Satz 4.13). Dabei wird Ψ durch $\sqrt{\mathbf{p}^2 + 1} \Psi$ ersetzt, das dieselben Voraussetzungen erfüllt. Hierbei teilen wir den Raum nach $|\mathbf{x}| \leq$ bzw. $\geq |t|/2$ auf. Dies ist

übersichtlicher als die alternative Aufteilung $|\mathbf{x} \pm \omega t| \leq$ bzw. $\geq |t|/2$, doch diese ist bei der Untersuchung kompakter Magnetfelder sinnvoll. Hierzu zeigen wir

Satz 3.7 (Alternative Abschätzung der freien Zeitentwicklung) Sei $\Psi \in \mathcal{H}$ mit $\hat{\psi} \in C_0^\infty$. Dann gibt es zu $l \in \mathbb{N}$ Konstanten $c > 0$ und $v_0 > 0$ so, daß

$$\left| \left(e^{-iH_0 t} P_\pm e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \right) (\mathbf{x}) \right| \leq \frac{c}{(1 + |\mathbf{x} \mp \omega t|)^l} \text{ für } |\mathbf{x} \mp \omega t| \geq |t|/2, \quad v \geq v_0. \quad (3.6)$$

Beweis: Für „+“. Setze $\mathbf{x} = \omega t + \varpi r$ mit $\varpi \in S^{\nu-1}$. Es gilt

$$\left(e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} e^{-iH_0 t} P_+ e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \right) (\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{\nu}{2}} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{r}f_a(\mathbf{p})} g_a(\mathbf{p}) \quad \text{mit}$$

$$f_a(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\varpi + \frac{t}{r} \left(\mathbf{p}\omega - \sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{v})^2 + m^2} \right) \quad \text{und} \quad g_a(\mathbf{p}) = 1/2 \left(1 + \frac{\alpha \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{v}) + \beta m}{\sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{v})^2 + m^2}} \right) \hat{\psi}(\mathbf{p}).$$

Der Parameter $a = (t/r, \varpi, \omega, v)$ ist in $A = [-2, 2] \times S^{\nu-1} \times S^{\nu-1} \times [v_0, \infty)$, ferner setzen wir wieder $G = B_R(0) \supset \text{supp}(\hat{\psi})$. Die Beschränktheit von $|\partial_{\mathbf{p}}^\beta f_a(\mathbf{p})|$ für $|\beta| \geq 1$ und $|\partial_{\mathbf{p}}^\gamma g_a(\mathbf{p})|$ für $|\gamma| \geq 0$ ergibt sich wie bei den Sätzen 3.3 und 3.6. Zur Abschätzung von $|\nabla f_a|$ nach unten betrachten wir

$$\left| \nabla f_a(\mathbf{p}) \right| = \left| \varpi + \frac{t}{r} \left(\omega - \frac{\mathbf{p} + \mathbf{v}}{\sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{v})^2 + m^2}} \right) \right| \geq 1 - 2 \left| \omega - \frac{\mathbf{p} + \mathbf{v}}{\sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{v})^2 + m^2}} \right|.$$

Mit $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{p} + \mathbf{v}}{\sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{v})^2 + m^2}} = \omega$ folgt $|\nabla f_a(\mathbf{p})| \geq \varepsilon > 0$ für $|\mathbf{p}| \leq R$ und $v \geq v_0$ mit $v_0 > R$ hinreichend groß. Mit Satz 3.1 folgt

$$\left| \left(e^{-iH_0 t} P_+ e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \right) (\omega t + \varpi r) \right| \leq \frac{c}{(1+r)^l} \text{ für } r \geq |t|/2, \quad v \geq v_0. \quad \blacksquare$$

3.5 Die Foldy-Wouthuysen-Darstellung

Wir verwenden bislang zwei Darstellungen des abstrakten Hilbertraumes \mathcal{H} : $L^2(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C}^\mu, d\mathbf{x})$ und $L^2(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C}^\mu, d\mathbf{p})$, kurz $L_{\mathbf{x}}^2$ und $L_{\mathbf{p}}^2$. Dabei operiert die Fouriertransformation $\mathcal{F} : L_{\mathbf{x}}^2 \rightarrow L_{\mathbf{p}}^2$ als kanonischer Isomorphismus, d.h. $\psi \in L_{\mathbf{x}}^2$ wird mit $\mathcal{F}\psi \in L_{\mathbf{p}}^2$ identifiziert und $A : L_{\mathbf{x}}^2 \rightarrow L_{\mathbf{x}}^2$ mit $\mathcal{F}^{-1}A\mathcal{F} : L_{\mathbf{p}}^2 \rightarrow L_{\mathbf{p}}^2$. Nun kommen für $m > 0$ zwei weitere Darstellungen hinzu. Der Vorteil dieser Foldy-Wouthuysen-Darstellungen ist, daß hierbei die spektralen Teilräume $\mathcal{H}_\pm = \mathcal{H}(H_0 = \pm E)$ einfach durch die oberen/unteren Komponenten der Spinoren gegeben sind (Lemma 3.9). Zur besseren Unterscheidung führen wir die neuen Variablen \mathbf{q} und \mathbf{y} ein, sowie die konkreten Hilberträume $L_{\mathbf{q}}^2, L_{\mathbf{y}}^2$. Mit der Matrix $U(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} (1 + \beta \frac{\alpha \cdot \mathbf{p}}{E+m})$ sei $\hat{\psi}_{FW}(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q})\hat{\psi}(\mathbf{q})$ die FW-Impulsdarstellung

und $\psi_{FW}(\mathbf{y}) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{\psi}_{FW})(\mathbf{y})$ die FW-Ortsdarstellung. (Dabei ist $\mathcal{F} : L^2_{\mathbf{y}} \rightarrow L^2_{\mathbf{q}}$ von $\mathcal{F} : L^2_{\mathbf{x}} \rightarrow L^2_{\mathbf{p}}$ zu unterscheiden.) Der Newton-Wigner-Ortsoperator \mathbf{x}_{NW} ist dadurch definiert, daß er in der FW-Ortsdarstellung der Multiplikationsoperator mit der Koordinate \mathbf{y} ist. Er läßt daher \mathcal{H}_{\pm} invariant. Es gilt $U^*(\mathbf{p}) = U(-\mathbf{p})$ und mit $\{\alpha, \beta\} = 0$ und $(\alpha \cdot \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2$ folgt

$$\begin{aligned} U(\mathbf{p})U^*(\mathbf{p}) &= \frac{E+m}{2E} \left(1 - \beta \frac{\alpha \cdot \mathbf{p}}{E+m} \beta \frac{\alpha \cdot \mathbf{p}}{E+m} \right) = \frac{E+m}{2E} \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{(E+m)^2} \right) \\ &= \frac{(E+m)^2 + (E^2 - m^2)}{2E(E+m)} = 1, \end{aligned}$$

und damit auch $U^*(\mathbf{p})U(\mathbf{p}) = 1$ (da $\dim(\mathbb{C}^{\mu}) < \infty$). Wir fassen dies zusammen in der folgenden

Definition 3.8 (Foldy-Wouthuysen-Darstellung) Sei $m > 0$. Wir setzen

$$U(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \left(1 + \beta \frac{\alpha \cdot \mathbf{p}}{E+m} \right).$$

$U(\cdot)$ ist ein unitärer matrixwertiger Multiplikationsoperator in $L^2(\mathbb{R}^{\nu}, \mathbb{C}^{\mu})$. Wir fassen ihn als Abbildung: $L^2_{\mathbf{p}} \rightarrow L^2_{\mathbf{q}}$ auf und definieren damit die Foldy-Wouthuysen-Darstellung:

$$\hat{\psi}_{FW}(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q})\hat{\psi}(\mathbf{q}) \quad \psi_{FW}(\mathbf{y}) = \left(\hat{\psi}_{FW} \right)^{\vee}(\mathbf{y}).$$

Der Newton-Wigner-Ortsoperator \mathbf{x}_{NW} wirkt in der FW-Ortsdarstellung als Multiplikationsoperator:

$$\left(\mathbf{x}_{NW} \Psi \right)_{FW}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \psi_{FW}(\mathbf{y})$$

Im Fall $m = 0$ gilt: Falls eine Matrix β derart existiert, daß die Vertauschungsrelationen erfüllt sind, so kann man $U(\mathbf{p}) = 1/\sqrt{2} (1 + \beta \frac{\alpha \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|})$ setzen. Falls jedoch kein β existiert, wie bei der Weyl-Gleichung, so muß man auf andere Weise ein $U(\mathbf{p})$ bestimmen, das H_0 diagonalisiert.

Wir bezeichnen die konkreten Variablen mit \mathbf{x} , \mathbf{p} , \mathbf{q} , \mathbf{y} . Abstrakte Operatoren sind beispielsweise H_0 , S , α , β , \mathbf{x}_{NW} . Dabei betrachten wir α , β als feste Matrizen und nicht als abstrakte Operatoren. Der Operator beispielsweise, der in der Standard-Darstellung β ist, ist in der FW-Darstellung $\frac{\beta m - \alpha \cdot \mathbf{p}}{E}$, und $\text{sign}(H_0) = H_0/|H_0|$ ist in der FW-Darstellung gegeben durch β .

Wir fassen die verschiedenen Darstellungen in der folgenden Tabelle zusammen:

	Standard-Ort	Standard-Impuls	FW-Impuls	FW-Ort
Zustand Ψ	$\psi(\mathbf{x})$	$\hat{\psi}(\mathbf{p})$	$\hat{\psi}_{FW}(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q})\hat{\psi}(\mathbf{q})$	$\psi_{FW}(\mathbf{y})$
Ortsoperator (Standard) \mathbf{x}	$\mathbf{x} \cdot$	$i\nabla_{\mathbf{p}}$	$U(\mathbf{q})i\nabla_{\mathbf{q}}U^*(\mathbf{q}) = i\nabla_{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q})$	—
Ortsoperator (NW) \mathbf{x}_{NW}	—	$U^*(\mathbf{p})i\nabla_{\mathbf{p}}U(\mathbf{p}) = i\nabla_{\mathbf{p}} + \mathbf{g}(\mathbf{p})$	$i\nabla_{\mathbf{q}}$	$\mathbf{y} \cdot$
Impuls \mathbf{p}	$-i\nabla_{\mathbf{x}}$	$\mathbf{p} \cdot$	$\mathbf{q} \cdot$	$-i\nabla_{\mathbf{y}}$
$e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}\Psi$	$e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x})$	$\hat{\psi}(\mathbf{p} - \mathbf{v})$	$U(\mathbf{q})\hat{\psi}(\mathbf{q} - \mathbf{v})$	—
$e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}}\Psi$	—	$U^*(\mathbf{p})\hat{\psi}_{FW}(\mathbf{p} - \mathbf{v})$	$\hat{\psi}_{FW}(\mathbf{q} - \mathbf{v})$	$e^{i\mathbf{v}\mathbf{y}}\psi_{FW}(\mathbf{y})$
$e^{-i\mathbf{v}\mathbf{p}}\Psi$	$\psi(\mathbf{x} - \mathbf{v})$	$e^{-i\mathbf{v}\mathbf{p}}\hat{\psi}(\mathbf{p})$	$e^{-i\mathbf{v}\mathbf{q}}\hat{\psi}_{FW}(\mathbf{q})$	$\psi_{FW}(\mathbf{y} - \mathbf{v})$
H_0	$-i\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \beta m$	$\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$	$\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} \beta$	$\sqrt{-\Delta_{\mathbf{y}} + m^2} \beta$

Lemma 3.9 (Diagonalisierung von H_0) Als Identität von Matrizen gilt

$$U(\mathbf{p}) (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m) U^{-1}(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \beta .$$

Daher ist in der FW-Impulsdarstellung $H_0 = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} \beta$.

Beweis: Wir betrachten die Umformung

$$U(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \left(1 + \beta \frac{\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m}{E+m} - \frac{m}{E+m} \right) = \sqrt{\frac{E}{2(E+m)}} \left(1 + \beta \frac{\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m}{E} \right) .$$

Mit den Vertauschungsrelationen (3.4) und $(\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m)^2 = E^2$ folgt

$$\begin{aligned} & U(\mathbf{p}) (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m) U^*(\mathbf{p}) \\ &= \frac{E}{2(E+m)} \left(1 + \beta \frac{\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m}{E} \right) (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m) \left(1 + \frac{\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m}{E} \beta \right) \\ &= \frac{E}{2(E+m)} (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m + \beta E) \left(1 + \frac{\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m}{E} \beta \right) \\ &= \frac{E}{2(E+m)} (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m + \beta 2E + \beta (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m) \beta) \\ &= \frac{E}{2(E+m)} (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m + \beta 2E - \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m) = \beta E. \blacksquare \end{aligned}$$

Im Fall $\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$ sind somit die Teilräume \mathcal{H}_{\pm} durch die oberen/unteren Komponenten von $\hat{\psi}_{FW}(\mathbf{q})$, $\psi_{FW}(\mathbf{y})$ gegeben, und die S-Matrix hat

die Blockstruktur $S_{FW} = \begin{pmatrix} S_+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_- \end{pmatrix}$, denn wegen $[S, H_0] = 0$ läßt S die Teilräume \mathcal{H}_\pm invariant. S_+ beschreibt die Streuung von Elektronen positiver Energie und S_- nach Ladungskonjugation die von Positronen. Außer der Blockstruktur von β wird nirgendwo eine spezielle Form der Dirac-Matrizen vorausgesetzt, alle Umformungen erfolgen mittels der Vertauschungsrelationen.

Der Newton-Wigner-Ortsoperator \mathbf{x}_{NW} läßt, im Unterschied zu \mathbf{x} , \mathcal{H}_\pm invariant. Der zugehörige Geschwindigkeitsoperator $\mathbf{Q}_{NW} = i[H_0, \mathbf{x}_{NW}] = \mathbf{p} H_0^{-1}$ entspricht der physikalischen Erwartung. Der zu \mathbf{x} gehörige Geschwindigkeitsoperator ist in der Standarddarstellung gegeben durch $\mathbf{Q} = \alpha$, er hat nur die Eigenwerte ± 1 . Er kommutiert nicht mit H_0 und ist daher keine Konstante der Bewegung, die Geschwindigkeit oszilliert um den Mittelwert $\mathbf{p} H_0^{-1}$. Diese „Zitterbewegung“ tritt bei \mathbf{Q}_{NW} nicht auf. Andererseits breitet sich ein bezüglich \mathbf{x}_{NW} lokalisierter Zustand mit Überlichtgeschwindigkeit aus. Beide Phänomene lassen sich dahingehend interpretieren, daß eine strikte Lokalisierung in einer relativistischen Einteilchentheorie nicht möglich ist. Für eine weitergehende Diskussion der verschiedenen Ortsoperatoren verweisen wir auf [35].

In der Standard-Impulsdarstellung ist $\mathbf{x} = i\nabla_{\mathbf{p}}$ und $\mathbf{x}_{NW} = U^*(\mathbf{p})i\nabla_{\mathbf{p}}U(\mathbf{p})$, also in gewissem Sinne „ $\mathbf{x}_{NW} = U^*(\mathbf{p})\mathbf{x}U(\mathbf{p})$ “. Wie ist dies zu interpretieren? —Wir betrachten U als Abbildungsvorschrift: $\mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{C}^{\mu \times \mu}$ und definieren einen abstrakten Operator \mathcal{U} dadurch, daß in der \mathbf{p} -Darstellung $\mathcal{U} = U(\mathbf{p})$ gilt. Damit ist nun $\mathbf{x}_{NW} = \mathcal{U}^*\mathbf{x}\mathcal{U}$. Man könnte diese Gleichung zur Definition von \mathbf{x}_{NW} verwenden, doch es ist wichtig, den folgenden Unterschied zu beachten: In der Gleichung $\hat{\psi}_{FW}(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q})\hat{\psi}(\mathbf{q})$ sind $\hat{\psi}_{FW}$ und $\hat{\psi}$ verschiedene Darstellungen desselben abstrakten Zustands $\Psi \in \mathcal{H}$, und dementsprechend ist $U(\mathbf{q})$ lediglich eine ungewöhnliche Schreibweise für die Identität in \mathcal{H} . Der Operator \mathcal{U} ist jedoch nicht die Identität. Unsere Definition von \mathbf{x}_{NW} läßt sich schreiben als

$$(\mathbf{x}_{NW})_{\mathbf{x}\text{-Darst.}} = \mathcal{F}^{-1} U^*(\mathbf{q}) \mathcal{F} \mathbf{y} \mathcal{F}^{-1} U(\mathbf{q}) \mathcal{F} . \quad (3.7)$$

Dies ist zwar äquivalent zu

$$(\mathbf{x}_{NW})_{\mathbf{x}\text{-Darst.}} = U^*(i\nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{x} U(i\nabla_{\mathbf{x}}) , \quad (3.8)$$

doch die Gleichungen sind unterschiedlich zu interpretieren: In (3.7) sind $(\mathbf{x}_{NW})_{\mathbf{x}\text{-Darst.}}$ und \mathbf{y} zwei verschiedene Darstellungen desselben Operators, während in (3.8) die unitäre Äquivalenz zweier verschiedener Operatoren vorliegt. Wir fassen zusammen:

Lemma 3.10 (Äquivalenz von \mathbf{x}_{NW} und \mathbf{x}) *Der unitäre Operator $\mathcal{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ sei in der Standard-Impulsdarstellung gegeben durch*

$(\mathcal{U}\Psi)^\wedge(\mathbf{p}) = U(\mathbf{p})\hat{\psi}(\mathbf{p})$ mit $U(\cdot) : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{C}^{\mu \times \mu}$, $\mathbf{p} \mapsto \sqrt{\frac{E+m}{2E}}(1 + \beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{E+m})$.
 Dann gilt $\mathbf{x}_{NW} = \mathcal{U}^* \mathbf{x} \mathcal{U}$.

Zu beachten ist auch folgender Unterschied: \mathcal{U} ist in der \mathbf{p} -Darstellung gegeben durch $U(\mathbf{p})$ und in der \mathbf{q} -Darstellung durch $U(\mathbf{q})$. $e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \mathcal{U} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}$ ist in der \mathbf{p} -Darstellung gegeben durch $U(\mathbf{p} + \mathbf{v})$, aber in der \mathbf{q} -Darstellung durch $U(\mathbf{q}) U(\mathbf{q} + \mathbf{v}) U^*(\mathbf{q})$ und nicht durch $U(\mathbf{q} + \mathbf{v})$.

Kapitel 4

Streuung am kurzreichweitigen Potential

Kurzreichweitige Potentiale im engeren Sinne sind dadurch gekennzeichnet, daß sie integrierbar abfallen, d.h. $\int_0^\infty dR \|V F(|\mathbf{x}| \geq R)\| < \infty$. In der allgemeinen Definition kurzreichweitiger Potentiale wird noch eine freie Resolvente zur Regularisierung eingeschoben, dadurch sind lokale Singularitäten zulässig (Def. 4.2, 4.6, 4.10). Für kurzreichweitige Potentiale ist die Existenz und Vollständigkeit der Wellenoperatoren gewährleistet. Wir untersuchen sie in Abschnitt 1 allgemein, in den Abschnitten 2–4 für $|\mathbf{p}|^\alpha$, $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ und $\alpha\mathbf{p} + \beta m$. Die wichtigste technische Aussage ist eine Abschätzung der Form (im relativistischen Fall)

$$\|V e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi\| \leq h(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \text{ gleichmäßig in } v \geq v_0,$$

mit $h \in L^1$. Damit läßt sich in den folgenden Kapiteln der Satz über majorisierte Konvergenz anwenden, um den $\lim_{v \rightarrow \infty}$ unter das Integral zu ziehen. Eine gewisse Redundanz ist in den Abschnitten 2–4 nicht zu vermeiden; es wäre unübersichtlich, die analogen Aussagen weiter zusammenzufassen. Die Struktur der Potentialmatrix und die Eichinvarianz der S -Matrix bei der Dirac-Gleichung werden in Abschnitt 5 untersucht.

4.1 Existenz und Vollständigkeit der Wellenoperatoren

Mit der Methode von V. Enß ergibt sich die Existenz und Vollständigkeit der Wellenoperatoren bei der Schrödinger-Gleichung [10, 30]. In [33] verallgemeinert B. Simon dies für Pseudo-Differentialoperatoren $H_0 = E(\mathbf{p})$. Der folgende Satz ist

ein Spezialfall seines Theorems 2.1 unter Berücksichtigung der darauffolgenden Bemerkungen.

Satz 4.1 (Vollständigkeit der Wellenoperatoren) *Voraussetzungen:*

1. Sei $E : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und für $\mathbf{p} \neq 0$ sei E in C^∞ mit $\nabla E(\mathbf{p}) \neq 0$.
2. Es gelte $E(\mathbf{p}) \rightarrow \infty$ für $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$.
3. V sei symmetrisch, und für ein $\gamma > 0$ gelte $D(|\mathbf{p}|^{2\gamma}) \subset D(V)$ und $\|V(\mathbf{p}^2 + 1)^{-\gamma}\| < \infty$ sowie die Abfallbedingung

$$\|V(\mathbf{p}^2 + 1)^{-\gamma}F(|\mathbf{x}| \geq R)\| \in L^1([0, \infty), dR) .$$

4. H sei eine selbstadjungierte Fortsetzung von $(H_0 + V)|_{D(H_0) \cap D(|\mathbf{p}|^{2\gamma})}$.
5. Zu $a, b \in \mathbb{R}$ gebe es $Q : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} Q(\mathbf{p}) = \infty$ so, daß $Q(\mathbf{p})P_{(a,b)}(H)$ beschränkt ist.

Dann gilt:

- a) $\Omega_\pm = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t}$ existieren.
- b) $\sigma^{sing}(H) = \emptyset$.
- c) $Ran \Omega_+ = Ran \Omega_- = \mathcal{H}^{ac}(H)$.
- d) Das Punktspektrum von H kann sich höchstens bei $E(0)$ häufen, und jeder Eigenwert $\neq E(0)$ hat endliche Vielfachheit.

Simon läßt mehr singuläre und kritische Werte zu, dies ist für unsere Anwendung nicht erforderlich.

Er setzt $\gamma \in \mathbb{N}$ voraus, bemerkt aber daß dies für die Gültigkeit des Satzes nicht erforderlich ist. Er braucht es für den Beweis eines Spezialfalles von unserem Lemma 4.3.

Der Beweis von a) soll kurz skizziert werden, für die übrigen Punkte verweisen wir auf [33]. Für $\hat{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu \setminus \{0\})$ ergibt sich wie im Beweis der Sätze 4.5 und 4.9:

$$\|Ve^{-iH_0 t}\Psi\| \in L^1(\mathbb{R}, dt)$$

Damit existieren die Bochner-Integrale

$$\Omega_\pm \Psi = 1 + i \int_0^{\pm\infty} dt e^{iHt} V e^{-iH_0 t} \Psi .$$

Mit einem Dichtheitsargument folgt nun die Existenz der Wellenoperatoren. Dies ist die bekannte Methode von Cook [30, Theorem XI.4].

Wir werden Satz 4.1 zum Beweis der Vollständigkeit für $H_0 = |\mathbf{p}|^\alpha$ und $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ verwenden (Satz 4.4, 4.8). Dabei ist in der Definition der kurzreichweitigen Potentiale $\gamma = \alpha/2$ gewählt, daher verhält sich $E(\mathbf{p})$ für große $|\mathbf{p}|$ wie $|\mathbf{p}|^{2\gamma}$. V ist Kato-beschränkt mit relativer Schranke $a < 1$ bezüglich H_0 , so daß die Voraussetzungen 4. und 5. (mit $Q = H_0 + 1$) erfüllt sind.

4.2 Kurzreichweitige Potentiale für den verallgemeinerten Schrödinger-Operator

In diesem Abschnitt ist $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$ und $H_0 = |\mathbf{p}|^\alpha$ mit $\alpha > 1$.

Definition 4.2 (Kurzreichweitige Potentiale) *Ein symmetrischer Multiplikationsoperator V heißt kurzreichweitiges Potential, wenn er bezüglich H_0 Kato-beschränkt mit relativer Schranke $a < 1$ ist und die folgende Abfallbedingung erfüllt:*

$$\left\| V (\mathbf{p}^2 + 1)^{-\alpha/2} F(|\mathbf{x}| \geq R) \right\| \in L^1([0, \infty), dR) \quad (4.1)$$

Für $\alpha = 2$ ist dies die Standarddefinition. Der Ausdruck $(\mathbf{p}^2 + 1)^{-\alpha/2}$ entspricht der Resolvente $(|\mathbf{p}|^\alpha + 1)^{-1}$ für große $|\mathbf{p}|$. Diese läßt sich hier nicht sinnvoll einsetzen, da sie bei $\mathbf{p} = 0$ i.a. nicht C^∞ ist. Die Abfallbedingung wird mit dem folgenden Lemma in eine anschaulichere Form überführt:

Lemma 4.3 *Der Multiplikationsoperator V sei Kato-beschränkt bezüglich H_0 . Dann gilt:*

$$\begin{aligned} & \left\| V (\mathbf{p}^2 + 1)^{-\alpha/2} F(|\mathbf{x}| \geq R) \right\| \in L^1([0, \infty), dR) \\ \iff & \left\| F(|\mathbf{x}| \geq R) V (\mathbf{p}^2 + 1)^{-\alpha/2} \right\| \in L^1([0, \infty), dR) \end{aligned}$$

Beweis: Wir geben den vollständigen Beweis der analogen Aussage beim skalaren relativistischen Hamiltonoperator (Lemma 4.7) und wollen hier nur die erforderlichen Modifikationen skizzieren: Der Operator H_1 ist jetzt durch $H_1 = (\mathbf{p}^2 + 1)^{\alpha/2}$ gegeben. Damit bleiben fast alle Beweisschritte dieselben, lediglich der Beweis der Abschätzung $\boxed{1}$ ist aufwendiger. Dazu setzen wir wieder $j_R(\mathbf{x}) = j(\mathbf{x}/R)$ und betrachten den Operator $[H_1, j_R(\mathbf{x})]H_1^{-1}$. Er ist in der Impulsdarstellung ein Integraloperator mit dem Kern

$$(2\pi)^{-\nu/2} \hat{j}_R(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \left((\mathbf{p}^2 + 1)^{\alpha/2} - (\mathbf{q}^2 + 1)^{\alpha/2} \right) (\mathbf{q}^2 + 1)^{-\alpha/2} .$$

Dieser läßt sich mit Taylor schließlich abschätzen durch

$$c \left| \hat{j}_R(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \right| \left(|\mathbf{p} - \mathbf{q}| + |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^\alpha \right), \text{ und damit folgt}$$

$$\left\| [H_1, j(\mathbf{x}/R)] H_1^{-1} \right\| \leq c \left\| (|\mathbf{p}| + |\mathbf{p}|^\alpha) \hat{j}_R(\mathbf{p}) \right\|_{L^1} \leq \frac{c_1}{R}. \quad \blacksquare$$

Bei der Schrödinger-Gleichung im \mathbb{R}^3 gilt die bekannte Abschätzung

$$\|\Psi\|_\infty \leq c(\|H_0\Psi\|_2 + \|\Psi\|_2) \quad \text{für } \Psi \in D(H_0).$$

Mit dieser Abschätzung und Lemma 4.3 zeigt man, daß folgende Bedingung hinreichend dafür ist, daß ein Potential V kurzreichweitig ist:

$$V \in L^2 + L^\infty \quad \text{mit} \quad \|\chi(|\mathbf{x}| \geq R)V\|_{L^2+L^\infty} \in L^1([0, \infty), dR)$$

Dabei ist die Norm definiert durch

$$\|f\|_{L^p+L^\infty} := \inf \left\{ \|f_1\|_p + \|f_2\|_\infty \mid f = f_1 + f_2 \right\}. \quad (4.2)$$

(Man rechnet leicht nach, daß dies tatsächlich eine Norm ist und der Raum diesbezüglich vollständig ist.) Dieses Kriterium läßt sich auf $\alpha \neq 2$ verallgemeinern. Dabei ergibt sich $p > \nu/\alpha$ für $\nu/\alpha \geq 2$ und $p = 2$ für $\nu/\alpha < 2$.

Satz 4.4 (Unitarität der S -Matrix) Sei $H_0 = |\mathbf{p}|^\alpha$, V ein kurzreichweitiges Potential gemäß Definition 4.2 und $H = H_0 + V$. Dann existieren die Wellenoperatoren Ω_\pm und sind vollständig, und S ist unitär.

Dies ist eine Anwendung von Satz 4.1 mit $\gamma = \alpha/2$. —Schließlich erhalten wir die folgende wichtige Abschätzung:

Satz 4.5 (Integrierbare Majorante) Sei V ein kurzreichweitiges Potential gemäß Definition 4.2. Zu Ψ mit $\hat{\psi} \in C_0^\infty$ gibt es ein $v_0 > 0$ und eine integrierbare Funktion $h \in L^1(\mathbb{R})$ so, daß

$$\|V e^{-i\frac{H_0}{\alpha v^{\alpha-1}}\tau} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}\Psi\| \leq h(\tau) \quad \text{für } \tau \in \mathbb{R}, \text{ gleichmäßig in } v \geq v_0. \quad (4.3)$$

Beweis: Nach Satz 3.2, angewandt auf $(\mathbf{p}^2 + 1)^{\alpha/2} \Psi$, gibt es ein $c > 0$ und ein $v_0 > 0$ so, daß

$$\left| \left(e^{-i\frac{H_0}{\alpha v^{\alpha-1}}\tau} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} (\mathbf{p}^2 + 1)^{\alpha/2} \Psi \right) (\mathbf{x}) \right| \leq \frac{c}{(1 + |\tau|)^{\frac{\nu+3}{2}}} \quad \text{für } |\mathbf{x}| \leq |\tau|/2, \quad v > v_0. \quad (4.4)$$

Nun betrachten wir die folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned}
 & \left\| e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} V e^{-i\frac{H_0}{\alpha v^{\alpha-1}}\tau} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \right\| \\
 &= \left\| V(\mathbf{p}^2 + 1)^{-\alpha/2} e^{-i\frac{|\mathbf{p}+\mathbf{v}|^\alpha}{\alpha v^{\alpha-1}}\tau} (\mathbf{p}^2 + 1)^{\alpha/2} \Psi \right\| \\
 &= \left\| V(\mathbf{p}^2 + 1)^{-\alpha/2} \left\{ F(|\mathbf{x}| \geq |\tau|/2) + F(|\mathbf{x}| \leq |\tau|/2) \right\} e^{-i\frac{|\mathbf{p}+\mathbf{v}|^\alpha}{\alpha v^{\alpha-1}}\tau} (\mathbf{p}^2 + 1)^{\alpha/2} \Psi \right\| \\
 &\leq \left\| V(\mathbf{p}^2 + 1)^{-\alpha/2} F(|\mathbf{x}| \geq |\tau|/2) \right\| \cdot \left\| (\mathbf{p}^2 + 1)^{\alpha/2} \Psi \right\| \\
 &+ \left\| V(\mathbf{p}^2 + 1)^{-\alpha/2} \right\| \cdot \left\| F(|\mathbf{x}| \leq |\tau|/2) e^{-i\frac{H_0}{\alpha v^{\alpha-1}}\tau} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} (\mathbf{p}^2 + 1)^{\alpha/2} \Psi \right\|.
 \end{aligned}$$

Der erste Term hängt nicht von v ab und ist nach (4.1) in L^1 . Der zweite Term läßt sich mit (4.4) abschätzen durch $c' \sqrt{\omega_\nu/\nu} (t/2)^\nu / (1+|\tau|)^{\frac{\nu+3}{2}} \leq c'' / (1+|\tau|)^{\frac{3}{2}}$. ■

4.3 Kurzreichweitige Potentiale für den skalaren relativistischen Hamiltonoperator

In diesem Abschnitt ist $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$ und $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ mit $m \geq 0$.

Definition 4.6 (Kurzreichweitige Potentiale) Ein symmetrischer Multiplikationsoperator V heißt kurzreichweitiges Potential, wenn er bezüglich H_0 Kato-beschränkt mit relativer Schranke $a < 1$ ist und die folgende Abfallbedingung erfüllt:

$$\left\| V \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}^{-1} F(|\mathbf{x}| \geq R) \right\| \in L^1([0, \infty), dR) \quad (4.5)$$

Mit dem folgenden Lemma erhält diese Abfallbedingung eine anschaulichere, d.h. leichter nachzuprüfende Form:

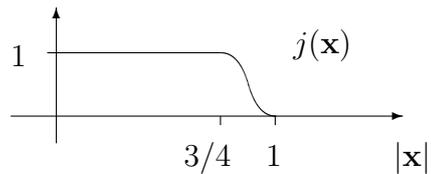
Lemma 4.7 Der Multiplikationsoperator V sei Kato-beschränkt bezüglich H_0 . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 & \left\| V \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}^{-1} F(|\mathbf{x}| \geq R) \right\| \in L^1([0, \infty), dR) \\
 \iff & \left\| F(|\mathbf{x}| \geq R) V \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}^{-1} \right\| \in L^1([0, \infty), dR) .
 \end{aligned}$$

Beweis: Wähle $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$

mit $j(\mathbf{x}) \in [0, 1]$ und

$$j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad |\mathbf{x}| \leq 3/4 \\ 0 & , \quad |\mathbf{x}| \geq 1 . \end{cases}$$



Es genügt, die Aussage für geglättetes $F(\cdot)$ zu zeigen. Dazu definieren wir

den Operator $H_1 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}$ und

$$\begin{aligned} h_1(R) &= \|V H_1^{-1}(1 - j(\mathbf{x}/R))\| \\ h_2(R) &= \|V(1 - j(\mathbf{x}/R)) H_1^{-1}\| \end{aligned}$$

und beweisen $h_1 \in L^1 \Leftrightarrow h_2 \in L^1$ mit der folgenden Abschätzung

$$|h_1(R) - h_2(R)| \leq h_1(R/2) \frac{c_1}{R} + \frac{c_2}{R^2} \quad \text{für } R > R_0. \quad (4.6)$$

Gilt nun $h_1 \in L^1$, so folgt

$$h_2(R) \leq h_1(R) + h_1(R/2) \frac{c_1}{R} + \frac{c_2}{R^2}$$

und damit $h_2 \in L^1$. Gilt andererseits $h_2 \in L^1$, so folgt

$$h_1(R) \leq h_2(R) + h_1(R/2) \frac{c_1}{R} + \frac{c_2}{R^2} \leq \frac{c_5}{R}$$

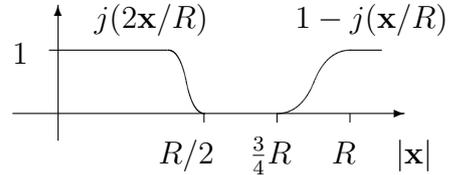
wegen $h_2(R) \leq c_3/R$ (vgl. Lemma 2.12) und $h_1(R/2) \leq c_4$. Also gilt

$$h_1(R) \leq h_2(R) + \frac{2c_1c_5}{R^2} + \frac{c_2}{R^2},$$

und damit $h_1 \in L^1$. —Zum Beweis von (4.6) betrachten wir

$$\begin{aligned} |h_1(R) - h_2(R)| &\leq \|V [H_1^{-1}, (1 - j(\mathbf{x}/R))]\| \\ &= \|V H_1^{-1}(1 - j(2\mathbf{x}/R) + j(2\mathbf{x}/R))[(1 - j(\mathbf{x}/R)), H_1] H_1^{-1}\| \\ &\leq \underbrace{\|V H_1^{-1}(1 - j(2\mathbf{x}/R))\|}_{=h_1(R/2)} \cdot \underbrace{\|[H_1, j(\mathbf{x}/R)] H_1^{-1}\|}_{\leq c_1/R} \quad \boxed{1} \\ &+ \underbrace{\|V H_1^{-1}\| \cdot \|j(2\mathbf{x}/R) H_1(1 - j(\mathbf{x}/R))\|}_{\leq c_2/R^2 \text{ für } R > R_0} \cdot 1 \quad \boxed{2} \end{aligned}$$

Die Abschätzung $\boxed{2}$ ergibt sich mit [11, Corollary 2.4] folgendermaßen: Der Abstand der Träger ist $R/4$. Es gibt c'_2 und R_0 so, daß für $R > R_0$



$$\|j(2\mathbf{x}/R) H_1(1 - j(\mathbf{x}/R))\| \leq \|F(|\mathbf{x}| \leq R/2) H_1 F(|\mathbf{x}| \geq 3/4 R)\| \leq \frac{c'_2}{R^2}.$$

Zum Beweis von $\boxed{1}$ setze $j_R(\mathbf{x}) = j(\mathbf{x}/R)$. Der Operator $[H_1, j_R(\mathbf{x})]$ ist in der Impulsdarstellung ein Integraloperator mit dem Kern

$$(2\pi)^{-\nu/2} \hat{j}_R(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + 1} - \sqrt{\mathbf{q}^2 + 1} \right).$$

Dieser läßt sich mit dem Mittelwertsatz abschätzen durch

$$c \left| \hat{j}_R(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \right| |\mathbf{p} - \mathbf{q}|. \text{ Damit folgt}$$

$$\left\| [H_1, j(\mathbf{x}/R)] \right\| \leq c \left\| |\mathbf{p}| \hat{j}_R(\mathbf{p}) \right\|_{L^1} = \frac{c_1}{R}. \quad \blacksquare$$

Wenn H_1 ein Differentialoperator ist, wie bei der Schrödinger- und Dirac-Gleichung, dann ist der Beweis von [1] einfacher, und der Term in [2] verschwindet. Für diesen Fall findet sich ein Beweis des Lemmas in [33, Remark 4] und eine Skizze in [30, p. 403, Problem 151].

Die kurzreichweitigen Potentiale zu $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ sind Spezialfälle der matrixwertigen kurzreichweitigen Potentiale des Dirac-Operators. Vergleiche daher die Bemerkungen nach Lemma 4.11 zum Yukawa-Potential.

Satz 4.8 (Unitarität der S-Matrix) Sei $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, V ein kurzreichweitiges Potential gemäß Definition 4.6 und $H = H_0 + V$. Dann existieren die Wellenoperatoren Ω_{\pm} und sind vollständig, und S ist unitär.

Die Vollständigkeit folgt wieder mit Satz 4.1 für $\gamma = 1/2$. Der Beweis der folgenden Aussage erfolgt im Wesentlichen genauso wie bei $H_0 = |\mathbf{p}|^{\alpha}$ (Satz 4.5).

Satz 4.9 (Integrierbare Majorante) Sei V ein kurzreichweitiges Potential gemäß Definition 4.6. Zu Ψ mit $\hat{\psi} \in C_0^{\infty}$ gibt es ein $v_0 > 0$ und eine integrierbare Funktion $h \in L^1(\mathbb{R})$ so, daß

$$\|V e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi\| \leq h(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \text{ gleichmäßig in } v \geq v_0. \quad (4.7)$$

Beweis: Nach Satz 3.3, angewandt auf $\sqrt{\mathbf{p}^2 + 1} \Psi$, gibt es ein $c > 0$ und ein $v_0 > 0$ so, daß

$$\left| \left(e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1} \Psi \right) (\mathbf{x}) \right| \leq \frac{c}{(1 + |t|)^{\frac{\nu+3}{2}}} \text{ für } |\mathbf{x}| \leq |t|/2, v > v_0. \quad (4.8)$$

Diese Abschätzung bringt zum Ausdruck, daß das Wellenpaket für kleine $|\mathbf{x}|$ klein ist. Es ist bei $\mathbf{x} = \omega t$ konzentriert, und dort ist das Potential klein. Diese geometrische Betrachtung motiviert die folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned} & \left\| e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} V e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \right\| \\ &= \left\| V \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}^{-1} \left\{ F(|\mathbf{x}| \geq |t|/2) + F(|\mathbf{x}| \leq |t|/2) \right\} e^{-it\sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{v})^2 + m^2}} \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1} \Psi \right\| \\ &\leq \left\| V \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}^{-1} F(|\mathbf{x}| \geq |t|/2) \right\| \cdot \left\| \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1} \Psi \right\| \\ &+ \left\| V \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}^{-1} \right\| \cdot \left\| F(|\mathbf{x}| \leq |t|/2) e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1} \Psi \right\| \end{aligned}$$

Der erste Term hängt nicht von ν ab und ist nach (4.5) in L^1 . Der zweite Term läßt sich mit (4.8) abschätzen durch $c' \sqrt{\omega_\nu/\nu} (t/2)^\nu / (1+|\tau|)^{\frac{\nu+3}{2}} \leq c'' / (1+|\tau|)^{\frac{3}{2}}$. ■

4.4 Kurzreichweitige Potentiale für den Dirac-Operator

In diesem Abschnitt ist $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C}^\mu)$ und $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ mit $m \geq 0$.

Definition 4.10 (Kurzreichweitige Potentiale) *Ein symmetrischer, matrixwertiger Multiplikationsoperator V heißt kurzreichweitiges Potential, wenn er bezüglich H_0 Kato-beschränkt mit relativer Schranke $a < 1$ ist und die folgende Abfallbedingung erfüllt:*

$$\|V(H_0 + i)^{-1}F(|\mathbf{x}| \geq R)\| \in L^1([0, \infty), dR) \quad (4.9)$$

Das folgende Lemma zeigt einerseits, daß man in der Abfallbedingung die Resolvente nach außen ziehen kann, wodurch die Bedingung einfacher zu handhaben ist, und stellt zum anderen einen Bezug zum skalaren relativistischen Hamiltonoperator her.

Lemma 4.11 *Der matrixwertige Multiplikationsoperator V sei Kato-klein bezüglich H_0 . Dann sind äquivalent:*

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad & \|V(H_0 + i)^{-1}F(|\mathbf{x}| \geq R)\| \in L^1([0, \infty), dR) \\ \boxed{2} \quad & \|F(|\mathbf{x}| \geq R)V(H_0 + i)^{-1}\| \in L^1([0, \infty), dR) \\ \boxed{3} \quad & \|V\sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}^{-1}F(|\mathbf{x}| \geq R)\| \in L^1([0, \infty), dR) \\ \boxed{4} \quad & \|F(|\mathbf{x}| \geq R)V\sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}^{-1}\| \in L^1([0, \infty), dR) \end{aligned}$$

Beweis: $\boxed{1} \Leftrightarrow \boxed{2}$ und $\boxed{3} \Leftrightarrow \boxed{4}$ ergeben sich wie bei Lemma 4.7. Zum Beweis von $\boxed{2} \Leftrightarrow \boxed{4}$ beachte, daß $(H_0 + i)\sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}^{-1}$ und seine Inverse beschränkt sind. ■

Hiermit ergibt sich ähnlich wie bei der Schrödinger-Gleichung (vgl. die Bemerkungen nach Lemma 4.3): Sei $\nu \geq 2$ und $p > \nu$. Sei $V \in L^p + L^\infty$ mit $\|V\chi(|\mathbf{x}| \geq R)\|_{L^p + L^\infty} \in L^1([0, \infty), dR)$. Dann ist V kurzreichweitig.

Insbesondere darf V für $\nu \geq 2$ lokale Singularitäten der Form $c/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{1-\varepsilon}$ haben. Für $\nu \geq 3$ ist auch $c/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ mit $|c| < (\nu - 2)/2$ zugelassen. Dies folgt aus der Hardy-Ungleichung [22, Lemma 1]

$$\left\| \frac{1}{|\mathbf{x}|} \Psi \right\| \leq \frac{2}{\nu - 2} \|\nabla \Psi\| \quad (\Psi \in H^1(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C})) .$$

Für $\nu = 3$ ist also das Yukawa-Potential $V(\mathbf{x}) = ce^{-r}/r$ kurzreichweitig, falls $|c| < 1/2$ gilt. Nach [8] ist die relative Schranke von $1/r$ und H_0 gegeben durch $a = 2$. Daher ist das Yukawa-Potential für $|c| \geq 1/2$ nicht zugelassen.

Wenn man in der Definition der kurzreichweitigen Potentiale $a = 0$ fordert, dann bilden diese einen Vektorraum, doch das Yukawa-Potential ist dann nicht kurzreichweitig.

Satz 4.12 (Unitarität der S -Matrix) *Sei $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$, V ein kurzreichweitiges matrixwertiges Potential gemäß Definition 4.10 und $H = H_0 + V$. Dann existieren die Wellenoperatoren Ω_{\pm} und sind vollständig, und S ist unitär.*

Für $\nu = 3$ ist dies Theorem 8.20 in [35], ein allgemeiner Beweis durch Verallgemeinerung von Satz 4.1 wird in [33] angedeutet.

Satz 4.13 (Integrierbare Majorante) *Sei V ein matrixwertiges kurzreichweitiges Potential gemäß Definition 4.10. Zu Ψ mit $\hat{\psi} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{\nu}, \mathbb{C}^{\mu})$ gibt es ein $v_0 > 0$ und eine Funktion $h \in L^1(\mathbb{R})$ so, daß*

$$\|Ve^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi\| \leq h(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \text{ gleichmäßig in } v \geq v_0. \quad (4.10)$$

Der Beweis ist derselbe wie bei $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}$ (Satz 4.9), mit der Abschätzung der freien Zeitentwicklung aus Satz 3.6. Dabei wird gemäß der Aussage [3] aus Lemma 4.11 der Term $\sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}^{\pm 1}$ eingeschoben, da $\sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}$ mit $\exp\{-it(\alpha(\mathbf{p} + \mathbf{v}) + \beta m)\}$ kommutiert. [1] läßt sich nicht direkt verwenden, da $\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m + i$ nicht damit kommutiert.

Satz 4.13 bleibt gültig, wenn man $e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}$ durch $e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}NW}$ ersetzt, doch das wird in dieser Arbeit nicht benötigt, da wir die Untersuchung von $e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}NW} S_{\pm} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}NW}$ auf die von $e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}$ zurückführen.

Wir unterteilen den Raum bislang nach $|\mathbf{x}| \leq$ bzw. $\geq |t|/2$. Dadurch sind die Formeln etwas kürzer als bei der alternativen Zerlegung nach $|\mathbf{x} \mp \omega t| \leq$ bzw. $\geq |t|/2$, doch bei der Untersuchung kompakter Magnetfelder wird sich letztere als sinnvoll erweisen.

4.5 Die Dirac-Gleichung mit Magnetfeld

In [35, Kapitel 4] wird untersucht, welche speziellen Formen der Potential-Matrix ein interessantes Verhalten bei Lorentz-Transformationen zeigen. Wir betrachten hauptsächlich elektromagnetische Felder $\mathbf{E} = -\text{grad } A_0$, $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Das elektrische Potential tritt in der Dirac-Gleichung als skalares Potential eA_0 auf, dabei bezeichnet e die Ladung des Elektrons. Das Vektorpotential wird üblicherweise

über die „Minimalsubstitution“ $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ in die freie Gleichung eingeführt. Dies ergibt zum einen in der klassischen Mechanik die gewünschten Bewegungsgleichungen, zum anderen liefern die Eichtheorien folgende Begründung: Die Phase der Wellenfunktion soll keine physikalische Bedeutung haben. Wenn nun \mathbf{p} und \mathbf{A} in der Evolutionsgleichung nur in der Kombination $\mathbf{p} - e\mathbf{A}$ auftreten, dann ist die Gleichung unter der kombinierten Substitution $\tilde{\Psi} = e^{ie\lambda}\Psi$, $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\lambda$ invariant.

Wir schreiben zur Abkürzung A_i statt eA_i und erhalten den Dirac-Operator $H = \alpha \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{A}) + \beta m + A_0 = H_0 + V$ mit der Potentialmatrix $V = A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}$. Sie ist kurzreichweitig, falls A_0 und \mathbf{A} die entsprechenden Abfallbedingungen erfüllen, und dann ist S unitär nach Satz 4.12. Die Dirac-Gleichung $i\dot{\Psi} = H\Psi$ ist mit diesem V Lorentz-invariant. ($V = A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}$ gilt nur in der Standard-Darstellung, in der FW-Darstellung ist α durch $U(\mathbf{q})\alpha U^*(\mathbf{q})$ zu ersetzen.)

In einem idealisierten Interferenzexperiment wäre die relative Phase der Streuamplitude meßbar, daher ist zu erwarten, daß S von der Eichung des Vektorpotentials unabhängig ist, und dies zeigt das folgende

Lemma 4.14 (Eichinvarianz von S)

Seien A_0 kurzreichweitig und $\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}} \in C^0(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R}^\nu)$ mit integrierbarem Abfall und $\text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \tilde{\mathbf{A}}$ in \mathcal{S}' . Dann gilt mit $V = A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}$ und $\tilde{V} = A_0 - \alpha \cdot \tilde{\mathbf{A}}$:

$$S(H_0, H_0 + V) = S(H_0, H_0 + \tilde{V})$$

Beweis: Sei $H = H_0 + V$ und $\tilde{H} = H_0 + \tilde{V}$. Nach Lemma 2.12 existiert ein $\lambda \in C^1(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R})$ mit $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\lambda$ und $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \lambda(\mathbf{x}) = 0$. Damit ist $\tilde{H} = e^{i\lambda} H e^{-i\lambda}$, denn es gilt $e^{i\lambda} \mathbf{p} e^{-i\lambda} = \mathbf{p} - \nabla\lambda$. Wegen

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} (e^{-i\lambda(\mathbf{x})} - 1) = 0 \quad \text{ist} \quad (e^{-i\lambda(\mathbf{x})} - 1)(H_0 + i)^{-1} \quad \text{kompakt.}$$

Nach [30, XI.3, Lemma 2] gilt für $\Psi \in D(H_0)$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (e^{-i\lambda(\mathbf{x})} - 1) e^{-iH_0 t} \Psi = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (e^{-i\lambda(\mathbf{x})} - 1) (H_0 + i)^{-1} e^{-iH_0 t} (H_0 + i) \Psi = 0 .$$

Für $\Omega_\pm = \Omega_\pm(H_0, H)$ und $\tilde{\Omega}_\pm = \Omega_\pm(H_0, \tilde{H})$ ergibt sich

$$\begin{aligned} (\tilde{\Omega}_\pm - e^{i\lambda} \Omega_\pm) \Psi &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (e^{i\lambda} e^{iHt} e^{-i\lambda} e^{-iH_0 t} - e^{i\lambda} e^{iHt} e^{-iH_0 t}) \Psi \\ &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{i\lambda} e^{iHt} (e^{-i\lambda} - 1) e^{-iH_0 t} \Psi = 0 . \end{aligned}$$

Nun ist $D(H_0)$ dicht in \mathcal{H} , daher gilt $\tilde{\Omega}_\pm = e^{i\lambda} \Omega_\pm$ und $\tilde{S} = \tilde{\Omega}_+^* \tilde{\Omega}_- = S$. ■

Im Fall $\nu = 2$, $B \in C_0^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ist \mathbf{A} nicht kurzreichweitig, falls $\int B \neq 0$ gilt. Wir erhalten jedoch die folgende Abschätzung analog zu Satz 4.13:

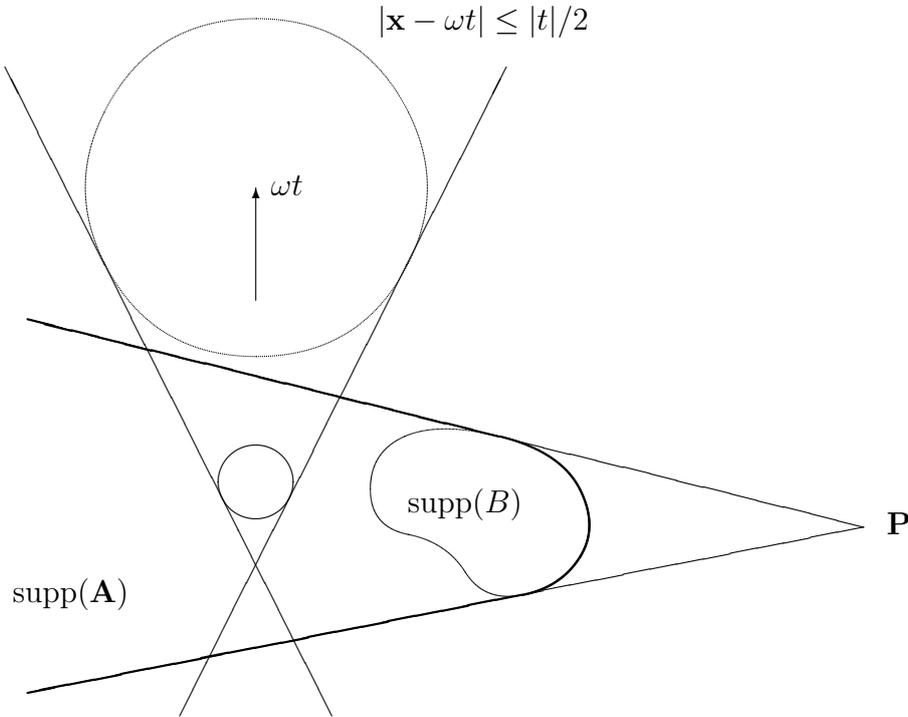
Satz 4.15 (Integrierbare Majorante bei kompaktem Magnetfeld) Sei $\nu = 2$, $B \in C_0^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, A_0 kurzreichweitig und $\omega \in S^{\nu-1}$. Dann gibt es ein zulässiges \mathbf{A} derart, daß folgendes gilt: Zu Ψ mit $\hat{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^\mu)$ gibt es ein $v_0 > 0$ und eine Funktion $h \in L^1(\mathbb{R})$ so, daß

$$\|Ve^{-iH_0t}e^{iv\mathbf{x}}\Psi\| \leq h(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, v \geq v_0. \quad (4.11)$$

Beweis: Die Terme mit A_0 werden wie gehabt abgeschätzt. In einer geeignet verschobenen transversalen Eichung (vergleiche Abschnitt 2.3) gilt für große $|t|$

$$B_{|t|/2}(\pm\omega t) \cap \text{supp}(\mathbf{A}) = \emptyset.$$

(Die Eichung wird in Abhängigkeit von ω gewählt, unabhängig von Ψ .) Dies veranschaulichen wir folgendermaßen:



Diese Argumentation wird in [2, 3] zur Untersuchung der Schrödinger-Gleichung mit kompaktem Magnetfeld eingesetzt. Nach Satz 3.7 gibt es Konstanten $c > 0$ und $v_0 > 0$ so, daß

$$\left| \left(e^{-iH_0t} P_{\pm} e^{iv\mathbf{x}} \Psi \right) (\mathbf{x}) \right| \leq \frac{c}{(1 + |\mathbf{x} \mp \omega t|)^3} \quad \text{für } |\mathbf{x} \mp \omega t| \geq |t|/2, v \geq v_0. \quad (4.12)$$

Wir betrachten die Zerlegung

$$\| -\alpha \cdot \mathbf{A} e^{-iH_0t} e^{iv\mathbf{x}} \Psi \| \leq \| -\alpha \cdot \mathbf{A} e^{-iH_0t} P_+ e^{iv\mathbf{x}} \Psi \| + \| -\alpha \cdot \mathbf{A} e^{-iH_0t} P_- e^{iv\mathbf{x}} \Psi \|.$$

Nun gilt für $v \geq v_0$ und hinreichend große $|t|$:

$$\begin{aligned} \left\| -\alpha \cdot \mathbf{A} e^{-iH_0 t} P_{\pm} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \right\| &= \left\| -\alpha \cdot \mathbf{A} F(|\mathbf{x} \mp \omega t| \geq |t|/2) e^{-iH_0 t} P_{\pm} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \right\| \\ &\leq \left\| -\alpha \cdot \mathbf{A} \right\| \cdot \left\| F(|\mathbf{x} \mp \omega t| \geq |t|/2) \frac{c}{(1 + |\mathbf{x} \mp \omega t|)^3} \right\| \\ &\leq \frac{c'}{1 + t^2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nach Definition 2.13 heißt $\mathbf{A} \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $\text{rot } \mathbf{A} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = B$ zulässiges Vektorpotential, wenn $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|)$ gilt und $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ integrierbar abfällt. Da der langreichweitige Anteil von \mathbf{A} transversal ist, ist S vermutlich unitär, doch das diesbezügliche Theorem 8.24 in [35] verlangt $B \in C^2$, so daß dies nicht allgemein bewiesen ist. Wir zeigen jedoch, daß S zumindest existiert:

Satz 4.16 (Existenz von S bei kompaktem Magnetfeld)

Sei $B \in C_0^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ein kompaktes Magnetfeld und \mathbf{A} ein zulässiges Vektorpotential zu B . Sei A_0 kurzreichweitig und $V = A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}$. Dann gilt:

1. $\Omega_{\pm} = \Omega_{\pm}(H_0, H_0 + V)$ existieren.

2. Ist S für ein zulässiges Vektorpotential unitär, dann für jedes.

Beweis: 1. Wir zeigen, daß $\Omega_+ \Psi$ für $\Psi \in \mathcal{H}_+$ mit $\text{supp}(\hat{\psi}) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, also mit Träger in der rechten Halbebene existiert. Analoge Aussagen gelten für Ω_- , \mathcal{H}_- und die linke Halbebene. Sei \mathbf{A}^t ein Vektorpotential in einer so verschobenen transversalen Eichung, daß der Träger von \mathbf{A}^t in einem nach links geöffneten schmalen Kegel liegt, wie auf der vorherigen Seite skizziert. Mit einer ähnlichen Abschätzung wie bei Satz 4.15 folgt, daß $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{iH^t t} e^{-iH_0 t} \hat{\Phi}$ existiert, wenn $\text{supp}(\hat{\phi}) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ gilt. (Dies folgt zunächst für $\hat{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, dann wird ein Dichtheitsargument angewandt.) Setze $H = H_0 + A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}$ und $H^t = H_0 + A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}^t$. Mit $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t + \nabla \lambda$ und $\Lambda(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r\mathbf{x})$ gilt $H = e^{i\lambda(\mathbf{x})} H^t e^{-i\lambda(\mathbf{x})}$. Nun ist

$$\begin{aligned} e^{iHt} e^{-iH_0 t} \Psi &= e^{i\lambda(\mathbf{x})} e^{iH^t t} e^{-i\lambda(\mathbf{x})} e^{-iH_0 t} \Psi \\ &= e^{i\lambda(\mathbf{x})} e^{iH^t t} e^{-iH_0 t} e^{-i\Lambda(\mathbf{p})} \Psi \\ &\quad + e^{i\lambda(\mathbf{x})} e^{iH^t t} e^{-iH_0 t} \left(e^{iH_0 t} e^{-i\lambda(\mathbf{x})} e^{-iH_0 t} - e^{-i\Lambda(\mathbf{p})} \right) \Psi . \end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert für $t \rightarrow \infty$ wegen $\text{supp}(e^{-i\Lambda(\mathbf{p})} \hat{\psi}) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, und der zweite Summand strebt nach dem folgenden Lemma 4.17 gegen 0.

2. Aus der Transformationsformel (4.14) folgt, daß \tilde{S}_{\pm} auch unitär sind, wenn dies für S_{\pm} gilt. \blacksquare

Lemma 4.17 (Asymptotik von Λ)

Seien \mathbf{A} , $\tilde{\mathbf{A}}$ zulässig mit $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{A}} = B \in C_0^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Nach Lemma 2.14 gibt es ein $\lambda \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \lambda$. $\Lambda(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r\mathbf{x})$ existiert und ist stetig und homogen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Es gilt

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH_0 t} e^{-i\lambda(\mathbf{x})} e^{-iH_0 t} = P_+ e^{-i\Lambda(\pm\mathbf{p})} + P_- e^{-i\Lambda(\mp\mathbf{p})}. \quad (4.13)$$

Beweis: $(e^{-i\lambda(\mathbf{x})} - e^{-i\Lambda(\mathbf{x})})(H_0 + i)^{-1}$ ist kompakt, also gilt

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH_0 t} (e^{-i\lambda(\mathbf{x})} - e^{-i\Lambda(\mathbf{x})}) e^{-iH_0 t} = 0.$$

Wir untersuchen daher $s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH_0 t} e^{-i\Lambda(\mathbf{x})} e^{-iH_0 t}$ und zeigen dazu zunächst $s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iEt} \Lambda(\mathbf{x}) e^{-iEt} = \Lambda(\pm\mathbf{p})$. Es ist $e^{iEt} \mathbf{x} e^{-iEt} = \mathbf{x} + \mathbf{Q}t$ mit $\mathbf{Q} = \mathbf{p}/E$, also

$$e^{iEt} \Lambda(\mathbf{x}) e^{-iEt} = \Lambda(\mathbf{x} + \mathbf{Q}t) = \Lambda(\mathbf{Q} + \mathbf{x}/t)$$

für $t > 0$. Setze $\mathbf{Q}_t = \mathbf{Q} + \mathbf{x}/t$. Es gilt $\mathbf{Q}_t \rightarrow \mathbf{Q}$ (komponentenweise) und $\mathbf{Q}_t^2 \rightarrow \mathbf{Q}^2$ in starker Resolventenkonvergenz. Sei $0 < r < 1$ und $\Psi \in P(\mathbf{Q}^2 > r^2)\mathcal{H} = P(r^2 < \mathbf{Q}^2 < 4)\mathcal{H}$. Wir setzen $\Psi_t = P(r^2 < \mathbf{Q}_t^2 < 4)\Psi$. Nach Lemma 2.5 gilt $\Psi_t \rightarrow \Psi$. Wähle $\tilde{\Lambda} \in C_\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $\tilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x})$ für $r < |\mathbf{x}| < 2$. Es gilt $s - \lim \tilde{\Lambda}(\mathbf{Q}_t) = \tilde{\Lambda}(\mathbf{Q})$, denn nach dem Satz von Stone-Weierstraß läßt sich $\tilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ gleichmäßig durch Polynome in $(x_k \pm i)^{-1}$ approximieren. Nun ist

$$\begin{aligned} (\Lambda(\mathbf{Q}) - \Lambda(\mathbf{Q}_t))\Psi &= (\Lambda(\mathbf{Q}) - \Lambda(\mathbf{Q}_t))(\Psi - \Psi_t) + (\Lambda(\mathbf{Q}) - \tilde{\Lambda}(\mathbf{Q}))\Psi_t \\ &\quad + (\tilde{\Lambda}(\mathbf{Q}) - \tilde{\Lambda}(\mathbf{Q}_t))\Psi_t + (\tilde{\Lambda}(\mathbf{Q}_t) - \Lambda(\mathbf{Q}_t))\Psi_t. \end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet für $t \rightarrow \infty$ wegen $\Psi_t \rightarrow \Psi$. Der zweite strebt gegen $(\Lambda(\mathbf{Q}) - \tilde{\Lambda}(\mathbf{Q}))\Psi = 0$. Der dritte Term strebt nach Lemma 2.3 ebenfalls gegen 0, und der vierte ist 0 nach Definition von Ψ_t . Für $t \rightarrow -\infty$ verwenden wir $\Lambda(\mathbf{x} + \mathbf{Q}t) = \Lambda(-\mathbf{Q} - \mathbf{x}/t)$ und erhalten insgesamt

$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iEt} \Lambda(\mathbf{x}) e^{-iEt} = \Lambda(\pm\mathbf{Q}) = \Lambda(\pm\mathbf{p})$. Nun gilt

$$\begin{aligned} e^{iH_0 t} \Lambda(\mathbf{x}) e^{-iH_0 t} &= (P_+ + e^{-i2Et} P_-) \Lambda(\mathbf{x} + \mathbf{Q}t) P_+ + (P_- + e^{i2Et} P_+) \Lambda(\mathbf{x} - \mathbf{Q}t) P_- \\ &\xrightarrow{s} P_+ \Lambda(\pm\mathbf{p}) P_+ + P_- \Lambda(\mp\mathbf{p}) P_- \quad (t \rightarrow \pm\infty) \end{aligned}$$

wegen $P_- \Lambda(\mathbf{x} + \mathbf{Q}t) P_+ \rightarrow P_- \Lambda(\pm\mathbf{p}) P_+ = 0$. ■

Nun ist S nicht mehr eichinvariant, es gilt stattdessen die folgende Transformationsformel:

Lemma 4.18 (Eichverhalten von S bei kompaktem Magnetfeld) Seien \mathbf{A} , $\tilde{\mathbf{A}}$ zulässig mit $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{A}} = B \in C_0^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, dann gibt es nach Lemma

2.14 ein $\lambda \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\lambda$. $\Lambda(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r\mathbf{x})$ existiert und ist stetig und homogen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sei A_0 kurzreichweitig, $V = A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}$ und $\tilde{V} = A_0 - \alpha \cdot \tilde{\mathbf{A}}$. Dann gilt für $S = S(H_0, H_0 + V)$ und $\tilde{S} = S(H_0, H_0 + \tilde{V})$:

$$\tilde{S}_\pm = e^{i\Lambda(\pm\mathbf{p})} S_\pm e^{-i\Lambda(\mp\mathbf{p})} \quad (4.14)$$

Durch Betrachtung unterschiedlich verschobener transversaler Eichungen sieht man, daß tatsächlich $\Lambda(\mathbf{x}) \neq 0$ sein kann und somit die S-Matrix nicht mehr eichinvariant ist.

Beweis: Wir setzen $H = H_0 + V$ und $\tilde{H} = H_0 + \tilde{V}$. Es gilt $\tilde{H} = e^{i\lambda(\mathbf{x})} H e^{-i\lambda(\mathbf{x})}$ und mit Lemma 4.17 folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_\pm &= s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{i\lambda(\mathbf{x})} e^{iHt} e^{-i\lambda(\mathbf{x})} e^{-iH_0t} \\ &= s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{i\lambda(\mathbf{x})} \left(e^{iHt} e^{-iH_0t} \right) \left(e^{iH_0t} e^{-i\lambda(\mathbf{x})} e^{-iH_0t} \right) \\ &= e^{i\lambda(\mathbf{x})} \Omega_\pm \left(P_+ e^{-i\Lambda(\pm\mathbf{p})} + P_- e^{-i\Lambda(\mp\mathbf{p})} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \tilde{S} &= \left(e^{i\Lambda(\mathbf{p})} P_+ + e^{i\Lambda(-\mathbf{p})} P_- \right) S \left(P_+ e^{-i\Lambda(-\mathbf{p})} + P_- e^{-i\Lambda(\mathbf{p})} \right) \\ &= e^{i\Lambda(\mathbf{p})} S e^{-i\Lambda(-\mathbf{p})} P_+ + e^{i\Lambda(-\mathbf{p})} S e^{-i\Lambda(\mathbf{p})} P_- , \end{aligned}$$

denn wegen $[S, H_0] = 0$ gilt $P_\pm S P_\pm = S P_\pm$ und $P_\pm S P_\mp = 0$. ■

Kapitel 5

Inverse Streutheorie für den verallgemeinerten Schrödinger-Operator

Wir betrachten den freien Hamiltonoperator $H_0 = |\mathbf{p}|^\alpha$ mit $\alpha > 1$ im Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$. Für $\alpha = 2$ ist dies der Schrödinger-Operator $\mathbf{p}^2 = -\Delta$. Wir haben in Abschnitt 3.2 die freie Zeitentwicklung $e^{-iH_0 t}$ untersucht und in Abschnitt 4.2 eine integrierbare Majorante h mit

$$\|V e^{-i\frac{H_0}{\alpha v^{\alpha-1}}\tau} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}\Psi\| \leq h(\tau) \quad \text{für } \tau \in \mathbb{R}, \text{ gleichmäßig in } v \geq v_0$$

für ein kurzreichweitiges Potential V erhalten. Dieses ist bezüglich H_0 Kato-beschränkt mit relativer Schranke $a < 1$ und erfüllt

$$\left\| V (\mathbf{p}^2 + 1)^{-\alpha/2} F(|\mathbf{x}| \geq R) \right\| \in L^1([0, \infty), dR) .$$

Mit $H = H_0 + V$ ist die S-Matrix $S = S(H_0, H)$ unitär. Wir werden in Abschnitt 1 den Hochenergielimes von S mit der durch $\mathbf{v} = v\omega$ erzeugten Translation im Impulsraum untersuchen, d.h. die Asymptotik von $e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}$ für $v \rightarrow \infty$. Damit erhalten wir in Abschnitt 2 die (regularisierte) X-Ray-Transformierte von V und rekonstruieren damit das Potential aus der S-Matrix.

5.1 Der Hochenergielimes von S

Der folgende Satz verallgemeinert das entsprechende Resultat aus [12, 13, 14, 15] für den Schrödinger-Operator $H_0 = \mathbf{p}^2$:

Satz 5.1 (Hochenergielimes von S) Sei $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$ und $H_0 = |\mathbf{p}|^\alpha$ mit $\alpha > 1$. Sei V ein kurzreichweitiges Potential gemäß Definition 4.2. Dann gilt für $\Psi \in \mathcal{H}$ mit $\hat{\psi} \in C_0^\infty$:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} i\alpha v^{\alpha-1} \left(e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} - 1 \right) \Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau V(\mathbf{x} + \omega\tau) \Psi . \quad (5.1)$$

Beweis: Wir zeigen

$$\lim_{v \rightarrow \infty} i\alpha v^{\alpha-1} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \left(\Omega_- - \Omega_+ \right) e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau V(\mathbf{x} + \omega\tau) \Psi . \quad (5.2)$$

In analoger Weise ergibt sich für $\hat{\phi} \in C_0^\infty$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha v^{\alpha-1} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \left(\Omega_\pm - 1 \right) e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Phi = i \int_0^{\pm\infty} d\tau V(\mathbf{x} + \omega\tau) \Phi$$

und insbesondere $\lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Omega_\pm e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Phi = \Phi$. Mit einem Dichtheitsargument nach Lemma 2.2 3. folgt $e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Omega_\pm e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \xrightarrow{s} 1$ und mit Lemma 2.3 3. folgt $e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Omega_\pm^* e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \xrightarrow{s} 1$. Mit $S - 1 = \Omega_+^* (\Omega_- - \Omega_+)$ und Lemma 2.3 1. erhalten wir

$$\begin{aligned} i\alpha v^{\alpha-1} \left(e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} - 1 \right) \Psi &= \left(e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Omega_+^* e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \right) \cdot \left(i\alpha v^{\alpha-1} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \left(\Omega_- - \Omega_+ \right) e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \right) \\ &\rightarrow 1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau V(\mathbf{x} + \omega\tau) \Psi . \end{aligned}$$

Zum Beweis von (5.2) betrachten wir die Duhamel-Formel

$$\begin{aligned} &i\alpha v^{\alpha-1} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \left(\Omega_- - \Omega_+ \right) e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \\ &= \alpha v^{\alpha-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} e^{iHt} V e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \\ &= \alpha v^{\alpha-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(|\mathbf{p}+\mathbf{v}|^\alpha + V)t} V e^{-i|\mathbf{p}+\mathbf{v}|^\alpha t} \Psi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i \frac{|\mathbf{p}+\mathbf{v}|^\alpha + V}{\alpha v^{\alpha-1}} \tau} V e^{-i \frac{|\mathbf{p}+\mathbf{v}|^\alpha}{\alpha v^{\alpha-1}} \tau} \Psi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i \frac{|\mathbf{p}+\mathbf{v}|^\alpha - U^\alpha + V}{\alpha v^{\alpha-1}} \tau} V e^{-i \frac{|\mathbf{p}+\mathbf{v}|^\alpha - U^\alpha}{\alpha v^{\alpha-1}} \tau} \Psi . \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dabei ist t die Zeit und $\alpha v^{\alpha-1}$ die asymptotische Geschwindigkeit, daher stellt $\tau = \alpha v^{\alpha-1} t$ die zurückgelegte Strecke dar. Der Integrand ist nach Satz 4.5 für

$v \geq v_0$ majorisiert durch $h(\tau)$ mit einer integrierbaren Funktion h . (Daraus folgt auch, daß das Integral absolut konvergiert. Damit existiert es als Bochner-Integral und nicht nur als uneigentliches Riemann-Integral.) Nun gilt für festes $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\nu}$

$$|\mathbf{p} + \mathbf{v}|^\alpha = v^\alpha + \alpha v^{\alpha-1} \omega \cdot \mathbf{p} + \mathcal{O}(v^{\alpha-2})$$

und damit für $\hat{\phi} \in D = C_0^\infty$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{|\mathbf{p} + \mathbf{v}|^\alpha - v^\alpha + V}{\alpha v^{\alpha-1}} \Phi = \omega \cdot \mathbf{p} \Phi .$$

Da D ein gemeinsamer Kernbereich der Operatoren ist (dies ergibt sich für die linke Seite mit dem Satz von Kato-Rellich und für die rechte mit dem „basic criterion“ [28, Theorem VIII.3]), liegt nach Lemma 2.2 starke Resolventenkonvergenz vor. Mit Lemma 2.5 folgt die starke Konvergenz der Exponentialfunktion. Ferner gilt

$$\begin{aligned} V e^{-i \frac{|\mathbf{p} + \mathbf{v}|^\alpha - v^\alpha}{\alpha v^{\alpha-1}} \tau} \Psi &= \underbrace{V (\mathbf{p}^2 + 1)^{-\alpha/2}}_{\text{beschr.}} e^{-i \frac{|\mathbf{p} + \mathbf{v}|^\alpha - v^\alpha}{\alpha v^{\alpha-1}} \tau} (\mathbf{p}^2 + 1)^{\alpha/2} \Psi \\ &\rightarrow V (\mathbf{p}^2 + 1)^{-\alpha/2} e^{-i \omega \mathbf{p} \tau} (\mathbf{p}^2 + 1)^{\alpha/2} \Psi \\ &= V e^{-i \omega \mathbf{p} \tau} \Psi . \end{aligned}$$

Damit konvergiert der Integrand in (5.3) stark gegen

$$e^{i \omega \mathbf{p} \tau} V(\mathbf{x}) e^{-i \omega \mathbf{p} \tau} \Psi = V(\mathbf{x} + \omega \tau) \Psi ,$$

und mit dem Satz über majorisierte Konvergenz (Satz 2.10) ergibt sich (5.2). Damit ist Satz 5.1 bewiesen. ■

Wir haben im Beweis nur das Verhalten von $|\mathbf{p}|^\alpha$ für $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$ benutzt, daher gelten analoge Aussagen beispielsweise auch für $(\mathbf{p}^2 + 1)^{\alpha/2}$ als freien Hamiltonoperator.

Zur physikalischen Deutung der Asymptotik von S sind zwei Punkte wesentlich:

1. Die asymptotische Geschwindigkeit ist $Q = \alpha v^{\alpha-1}$. Der n -te Term der Dyson-Reihe für S , der die n -te Potenz von V enthält, ist von der Größenordnung $\mathcal{O}(1/Q^n)$, da die Region, wo das Potential stark ist, in einer Zeit $\sim 1/Q$ durchlaufen wird. Beim Grenzübergang $v \rightarrow \infty$ im Impulsraum gilt für die Geschwindigkeit ebenfalls $Q \rightarrow \infty$, daher ist der Grenzwert von $iQ(S(Q) - 1)$ durch den Term erster Ordnung der Dyson-Reihe bestimmt und somit linear im Potential V .

2. Das Zerfließen eines Wellenpaketes $e^{-iH_0 t}\Psi$ erfolgt asymptotisch gemäß $\sigma_x \approx \sigma_Q |t|$. Dabei bezeichnet σ_x die Streuung (Standardabweichung) des Ortes und σ_Q die der Geschwindigkeit. Man erhält für $\hat{\psi} \in C_0^\infty$: Die Streuung des Impulses $\sigma_p(e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}\Psi)$ ist unabhängig von v , und es gilt $\sigma_Q(e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}\Psi) = \mathcal{O}(v^{\alpha-2})$. Für $\alpha < 2$ strebt also $\sigma_Q \rightarrow 0$, für $\alpha = 2$ ist σ_Q unabhängig von v (Gallilei-Invarianz der Schrödinger-Gleichung) und für $\alpha > 2$ wächst σ_Q mit v , aber langsamer als Q . In allen drei Fällen gilt: Zur Zeit t ist das Wellenpaket bei $\mathbf{x} = \alpha v^{\alpha-1} \omega t$ konzentriert, und für die Streuung gilt

$$\sigma_x \approx |t| \cdot \mathcal{O}(v^{\alpha-2}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|/v) .$$

Damit ist in jedem beschränkten Gebiet das Zerfließen des Wellenpaketes für $v \rightarrow \infty$ zu vernachlässigen, da es auf einer langsameren Zeitskala erfolgt. Daher kann man die freie Zeitentwicklung durch eine reine Translation $e^{-i\omega\mathbf{p}\mathcal{T}}$ ersetzen, und der Term erster Ordnung aus der Dyson-Reihe geht in die X-Ray-Transformierte des Potentials V über.

5.2 Rekonstruktion des Potentials

Wir wollen nun das Potential V aus dem Hochenergielimes von S rekonstruieren und folgen dabei dem Verfahren aus [13]. Es sei \mathcal{V} die Menge der kurzreichweitigen Potentiale gemäß Definition 4.2, das heißt $V \in \mathcal{V}$ ist ein Multiplikationsoperator, der bezüglich H_0 Kato-beschränkt mit relativer Schranke $a < 1$ ist und die folgende Abfallbedingung erfüllt:

$$\left\| V (\mathbf{p}^2 + 1)^{-\alpha/2} F(|\mathbf{x}| \geq R) \right\| \in L^1([0, \infty), dR) . \quad (5.4)$$

Satz 5.2 (Rekonstruktion des Potentials) *Sei $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$ mit $\nu \geq 2$, $H_0 = |\mathbf{p}|^\alpha$ mit $\alpha > 1$ und \mathcal{V} die Menge der kurzreichweitigen Potentiale gemäß Definition 4.2. Dann gilt mit $S = S(H_0, H_0 + V)$: Die Abbildung*

$$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad V \mapsto S$$

ist injektiv, daher läßt sich V aus S eindeutig rekonstruieren.

Unsere Methode ist für $\nu = 1$ nicht anwendbar, da sie auf der X-Ray-Transformation beruht und diese sich im Eindimensionalen auf eine Zahl reduziert.

Beweis: Man kann wie im Beweis von Satz 6.1 zeigen, daß $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau V(\mathbf{y} + \omega\tau)$ für fast alle \mathbf{y} existiert, doch mit Satz 2.16 können wir nur eine stetige, integrierbar abfallende Funktion aus ihrer X-Ray-Transformierten rekonstruieren. Daher betrachten wir $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}$ mit $\hat{\phi}, \hat{\psi} \in C_0^\infty$ und definieren die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(\mathbf{y}) = \left(e^{-i\mathbf{p}\mathbf{y}} \Phi, V e^{-i\mathbf{p}\mathbf{y}} \Psi \right).$$

Mit Satz 5.1 erhalten wir ihre X-Ray-Transformierte

$$\tilde{f}(\mathbf{y}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f(\mathbf{y} + \omega\tau) = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(e^{-i\mathbf{p}\mathbf{y}} \Phi, i\alpha v^{\alpha-1} \left(e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} - 1 \right) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{y}} \Psi \right)$$

aus der S-Matrix. Wegen $f(\mathbf{y}) = \left(e^{-i\mathbf{p}\mathbf{y}} \Phi, V (\mathbf{p}^2 + 1)^{-\alpha/2} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{y}} (\mathbf{p}^2 + 1)^{\alpha/2} \Psi \right)$ ist f stetig. Analog zum Beweis von Satz 4.9 betrachten wir die Zerlegung

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{y})| &\leq \|\Phi\| \cdot \left\| V (\mathbf{p}^2 + 1)^{-\alpha/2} F(|\mathbf{x}| \geq |\mathbf{y}|/2) \right\| \cdot \left\| (\mathbf{p}^2 + 1)^{\alpha/2} \Psi \right\| \\ &\quad + \|\Phi\| \cdot \left\| V (\mathbf{p}^2 + 1)^{-\alpha/2} \right\| \cdot \left\| F(|\mathbf{x}| \leq |\mathbf{y}|/2) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{y}} (\mathbf{p}^2 + 1)^{\alpha/2} \Psi \right\|. \end{aligned}$$

Der erste Summand fällt integrierbar ab, da V kurzreichweitig ist, und der zweite fällt schneller als jede Potenz von $1/|\mathbf{y}|$ wegen $(\mathbf{p}^2 + 1)^{\alpha/2} \hat{\psi} \in \mathcal{S}$. Mit Satz 2.16 erhalten wir nun f aus \tilde{f} und damit aus der S-Matrix. Damit kennen wir $(\Phi, V\Psi)$ für Φ, Ψ aus einer dichten Menge, und damit ist V eindeutig bestimmt. ■

Kapitel 6

Inverse Streutheorie für den skalaren relativistischen Hamiltonoperator

Wir betrachten den skalaren relativistischen Hamiltonoperator $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ mit $m \geq 0$ im Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu)$. Er entspricht der relativistischen Gesamtenergie eines Teilchens mit der Ruhemasse m , wird jedoch in der Physik nicht verwendet, da er sich nicht in Lorentz-invarianter Weise an ein äußeres Feld koppeln läßt [34]. Er ist jedoch dadurch interessant, daß das Symbol des physikalisch relevanten Dirac-Operators $\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ die Eigenwerte $\pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ hat. Daher verhält sich letzterer in vielerlei Hinsicht ähnlich wie der skalare relativistische Hamiltonoperator H_0 . Wir haben in Abschnitt 3.3 die freie Zeitentwicklung $e^{-iH_0 t}$ untersucht und in Abschnitt 4.3 eine integrierbare Majorante h mit

$$\|V e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi\| \leq h(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \text{ gleichmäßig in } v \geq v_0$$

für ein kurzreichweitiges Potential V erhalten. Dieses ist bezüglich H_0 Kato-beschränkt mit relativer Schranke $a < 1$ und erfüllt

$$\left\| V \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}^{-1} F(|\mathbf{x}| \geq R) \right\| \in L^1([0, \infty), dR) .$$

Mit $H = H_0 + V$ ist die S-Matrix $S = S(H_0, H)$ unitär. In Abschnitt 1 untersuchen wir den Hochenergielimes von S , also $s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}$ und erhalten daraus in Abschnitt 2 die X-Ray-Transformierte von V , sofern das Potential stetig ist. Damit können wir es aus der S-Matrix rekonstruieren.

6.1 Der Hochenergielimes von S

Wir haben in Abschnitt 5.1 die Hochenergie-Asymptotik von S für $H_0 = |\mathbf{p}|^\alpha$ mit $\alpha > 1$ untersucht und einen Ausdruck erhalten, der linear im Potential V ist. Für $\alpha = 1$ ergibt sich ein qualitativ anderes Verhalten, da nun die Geschwindigkeit beschränkt ist. Der folgende Satz für $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ weist große Ähnlichkeit mit den Sätzen 7.2 und 7.6 für den Dirac-Operator auf.

Satz 6.1 (Hochenergielimes von S) Sei $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ mit $m \geq 0$ und V ein kurzreichweitiges Potential gemäß Definition 4.6. Dann gilt mit $\mathbf{v} = v\omega$

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} V(\mathbf{x} + \omega t) dt \right\}. \quad (6.1)$$

Beweis: Wir betrachten die dichte Menge der Zustände Ψ mit $\hat{\psi} \in C_0^\infty$. Es gilt

$$\begin{aligned} & e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Omega_+ e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \\ &= \Psi + i \int_0^\infty dt e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} e^{iHt} V e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \\ &= \Psi + i \int_0^\infty dt e^{i(\sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{v})^2+m^2}+V(\mathbf{x}))t} V(\mathbf{x}) e^{-i\sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{v})^2+m^2}t} \Psi \\ &= \Psi + i \int_0^\infty dt e^{i(\sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{v})^2+m^2}-v+V(\mathbf{x}))t} V(\mathbf{x}) e^{-i(\sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{v})^2+m^2}-v)t} \Psi. \end{aligned}$$

Wegen $\sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{v})^2+m^2} = v + \omega \cdot \mathbf{p} + \mathcal{O}(1/v)$ für festes $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^\nu$ gilt für $\hat{\phi} \in D = C_0^\infty$

$$\left(\sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{v})^2+m^2} - v + V \right) \Phi \xrightarrow{v \rightarrow \infty} (\omega \cdot \mathbf{p} + V) \Phi$$

und mit Lemma 2.2 folgt die starke Resolventenkonvergenz. Mit Lemma 2.5 ergibt sich nun die starke Konvergenz der Exponentialfunktion. Wir argumentieren wie bei Satz 5.1, indem wir eine Resolvente einschieben: $V \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}^{-1}$ ist beschränkt und mit

$$e^{-i(\sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{v})^2+m^2}-v)t} \sqrt{\mathbf{p}^2+1} \Psi \xrightarrow{v \rightarrow \infty} e^{-i\omega \cdot \mathbf{p} t} \sqrt{\mathbf{p}^2+1} \Psi$$

können wir jetzt auf die Konvergenz des Integranden schließen. Dieser ist nach Lemma 4.9 durch eine integrierbare Funktion $h(t)$ unabhängig von $v \geq v_0$ majorisiert. Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz (Satz 2.10) folgt

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Omega_+ e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi &= \Psi + i \int_0^\infty dt e^{i(\omega \cdot \mathbf{p} + V(\mathbf{x}))t} V(\mathbf{x}) e^{-i\omega \cdot \mathbf{p} t} \Psi \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} e^{i(\omega \cdot \mathbf{p} + V(\mathbf{x}))s} e^{-i\omega \cdot \mathbf{p} s} \Psi. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Wir betrachten zunächst stetige, integrierbar abfallende Potentiale. Dann sehen wir folgendermaßen, daß sich (6.2) als $\exp\{i \int_0^\infty dt V(\mathbf{x} + \omega t)\} \Psi$ schreiben läßt: Die Schar unitärer Operatoren $U(s) = e^{i\omega \mathbf{p} s} e^{-i(\omega \mathbf{p} + V(\mathbf{x}))s}$ erfüllt $U(0) = 1$ und die Differentialgleichung

$$i\dot{U}(s) = e^{i\omega \mathbf{p} s} V(\mathbf{x}) e^{-i(\omega \mathbf{p} + V(\mathbf{x}))s} = V(\mathbf{x} + \omega s)U(s),$$

dieses Anfangswertproblem wird auch von $\exp\{-i \int_0^s dt V(\mathbf{x} + \omega t)\}$ gelöst. Zur Verallgemeinerung können wir wegen $V \in L_{loc}^2$ die Zerlegung $V = V_+ - V_-$ mit $V_\pm \geq 0$ betrachten und finden $V_{n,\pm} \in C_0^0$ mit $V_{n,\pm} \nearrow V_\pm$ fast überall. Wir setzen $V_n := V_{n,+} - V_{n,-}$. Die Abschätzung

$$\|V e^{-i\omega \mathbf{p} t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi\| \leq h(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \text{ gleichmäßig in } v \geq v_0$$

bleibt offenbar für jedes Potential V' mit $|V'(\mathbf{x})| \leq |V(\mathbf{x})|$ gültig, insbesondere gilt sie auch für $V_\pm, V_{n,\pm}$ und V_n . Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Omega_+ e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi &= \Psi + i \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty dt e^{i(\omega \mathbf{p} + V_n)t} V_n e^{-i\omega \mathbf{p} t} \Psi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\{i \int_0^\infty dt V_n(\mathbf{x} + \omega t)\} \Psi. \end{aligned}$$

Durch analoge Betrachtung von $\Omega_+(H_0, H_0 + V_\pm)$ folgt für eine geeignete Teilfolge, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp\{i \int_0^\infty dt V'_{n,\pm}(\mathbf{x} + \omega t)\}$ für fast alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\nu$ existiert. Nun gilt für fast alle \mathbf{x} , daß $V'_{n,\pm}(\mathbf{x} + \omega t) \nearrow V_\pm(\mathbf{x} + \omega t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Dabei haben wir für $\nu > 1$ die folgende Aussage benutzt:

$$\mathcal{M} \text{ ist Nullmenge im } \mathbb{R}^{\nu-1} \Leftrightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{R} \text{ ist Nullmenge im } \mathbb{R}^\nu$$

Nun existiert also $\int_0^\infty dt V_\pm(\mathbf{x} + \omega t)$ für fast alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\nu$, denn andernfalls wäre $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty dt V'_{n,\pm}(\mathbf{x} + \omega t) = +\infty$ und die Exponentialfunktion konvergiert nicht. Zusammen mit einer analogen Behandlung von Ω_- und mit einem Dichtheitsargument erhalten wir nun

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Omega_\pm e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} = \exp\{i \int_0^{\pm\infty} dt V(\mathbf{x} + \omega t)\}.$$

Mit $S = \Omega_+^* \Omega_-$ und Lemma 2.4 1. folgt zunächst in schwacher Konvergenz

$$w - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} = \exp\{-i \int_{-\infty}^{+\infty} V(\mathbf{x} + \omega t) dt\}. \quad (6.3)$$

Nun sind $e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}$ und sein schwacher Grenzwert unitär, daher können wir mit Lemma 2.4 2. auf starke Konvergenz schließen. ■

Ein anderer Beweis ergibt sich ohne den Satz über majorisierte Konvergenz mit $e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}}e^{iHt}e^{-iH_0t}e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \xrightarrow{s} e^{i(\omega\mathbf{p}+V)t}e^{-i\omega\mathbf{p}t}$ und einer zu Lemma 7.3 analogen Aussage. Für ein beschränktes Potential V läßt sich der Beweis auch mit der Dyson-Reihe führen, wie bei Satz 7.2.

Die physikalische Deutung der Asymptotik von S unterscheidet sich von der im Fall $H_0 = |\mathbf{p}|^\alpha$ (am Ende von Abschnitt 5.1) folgendermaßen:

1. Da die Geschwindigkeit durch 1 beschränkt ist, bleiben die Terme der Dyson-Reihe für $v \rightarrow \infty$ von derselben Größenordnung. Sie vereinfachen sich jedoch soweit, daß die Reihe zur Exponentialfunktion aufsummiert werden kann.
2. Das Zerfließen eines Wellenpaketes $e^{-iH_0t}\Psi$ erfolgt asymptotisch gemäß $\sigma_x \approx \sigma_Q|t|$. Es gilt für $\hat{\psi} \in C_0^\infty$

$$\sigma_Q(e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}\Psi) = \mathcal{O}(1/v) \quad \text{und damit} \quad \sigma_x = \mathcal{O}(|t|/v) .$$

Dies läßt sich folgendermaßen deuten: Der Mittelwert der Geschwindigkeit strebt gegen ω und da die Geschwindigkeit durch 1 beschränkt ist, kann es keine wesentlich größeren Werte geben. Daher strebt die Streuung gegen 0. Damit kann man die freie Zeitentwicklung wieder durch eine reine Translation $e^{-i\omega\mathbf{p}t}$ ersetzen, und der Hochenergielimes von S ist ein Multiplikationsoperator.

Mit Lemma 2.3 erhalten wir aus

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}}\Omega_\pm e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} = \exp\left\{i \int_0^{\pm\infty} dt V(\mathbf{x} + \omega t)\right\} \quad (6.4)$$

die analoge Aussage für die adjungierten Wellenoperatoren

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}}\Omega_\pm^* e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} = \exp\left\{-i \int_0^{\pm\infty} dt V(\mathbf{x} + \omega t)\right\} . \quad (6.5)$$

Wegen $Ran \Omega_\pm = \mathcal{H}^{cont}$, also $Kern \Omega_\pm^* = \mathcal{H}^{pp}$ ist es zunächst überraschend, daß der Grenzwert unitär ist. Man kann dies dahingehend interpretieren, daß $e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}$ für $v \rightarrow \infty$ alle Zustände $\Psi \in \mathcal{H}$ nach \mathcal{H}^{cont} „verschiebt“. Dies beweisen wir folgendermaßen: Sei P^{pp} der Projektor auf $\mathcal{H}^{pp}(H)$, dann gilt

$$\begin{aligned} P^{pp}e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}\Psi &= P^{pp}\left(e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}\Psi - \Omega_+e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}e^{-i \int_0^\infty dt V}\Psi\right) \\ &= P^{pp}e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}\left(e^{i \int_0^\infty dt V} - e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}}\Omega_+e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}\right)e^{-i \int_0^\infty dt V}\Psi \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

Mit der Kettenregel für Wellenoperatoren [30, p. 18] folgt nun aus (6.4) und (6.5)

$$\begin{aligned} w - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\nu\mathbf{x}} S(H_0 + V', H_0 + V'') e^{i\nu\mathbf{x}} \\ = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} (V'' - V')(\mathbf{x} + \omega t) dt \right\}. \end{aligned}$$

Hier kann man aus der starken Konvergenz der Wellenoperatoren auf die schwache Konvergenz der mit $e^{i\nu\mathbf{x}}$ verschobenen S-Matrix schließen, da diese aber i.a. nicht unitär in \mathcal{H} ist (sondern unitär in $e^{-i\nu\mathbf{x}}\mathcal{H}^{cont}(H')$), folgt daraus keine starke Konvergenz. Diese Formel wäre wohl nur schwer direkt zu zeigen, da man dazu die Zeitentwicklung des „freien“ Hamiltonoperators $H_0 + V'$ abschätzen müßte. Es ist interessant, daß man auch in manchen Fällen Aussagen über die Asymptotik von S machen kann, bei denen sich die freie Zeitentwicklung nicht gut abschätzen läßt.

6.2 Rekonstruktion des Potentials

Wir wollen nun die Aussagen über den Hochenergielimes der S-Matrix zur Rekonstruktion des Potentials V verwenden, benötigen dazu allerdings stärkere Voraussetzungen:

Satz 6.2 (Rekonstruktion des Potentials) *Sei $\nu \geq 2$, $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ mit $m \geq 0$ und $\mathcal{V} = \{V \in C^0(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R}) \mid \|V\chi(|\mathbf{x}| \geq R)\|_\infty \in L^1\}$. Dann gilt: Die Abbildung*

$$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad V \mapsto S$$

ist injektiv, also läßt sich V aus S eindeutig rekonstruieren.

Beweis: Es gilt $\|V F(|\mathbf{x}| \geq R) \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}^{-1}\| \leq \|V F(|\mathbf{x}| \geq R)\| \in L^1$, und nach Lemma 4.7 ist V kurzreichweitig. Mit Satz 6.1 folgt

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\nu\mathbf{x}} S e^{i\nu\mathbf{x}} = e^{-i\tilde{V}(\mathbf{x}, \omega)}$$

mit $\tilde{V}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\mathbf{x} + \omega t) dt$. Aus dem Hochenergielimes von S erhalten wir die X-Ray-Transformierte \tilde{V} zunächst nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π , doch nach Satz 2.17 ist \tilde{V} stetig und verschwindet für $|\mathbf{x}^\perp| \rightarrow \infty$, und damit erhalten wir \tilde{V} eindeutig. Mit diesem Satz können wir nun auch V aus \tilde{V} rekonstruieren. ■

Da sich die X-Ray-Transformierte \tilde{V} für $\nu = 1$ auf eine Zahl reduziert, können wir diesen Fall mit unserer Methode nicht behandeln.

Obwohl Satz 6.1 auch für Potentiale mit lokalen Singularitäten gültig ist, haben wir hier die Stetigkeit von V gefordert. Dies war notwendig, um \tilde{V} eindeutig aus $e^{-i\tilde{V}}$ zu gewinnen.

Wenn es gelänge, den Multiplikationsoperator \tilde{V} für ein allgemeineres V aus der S-Matrix zu gewinnen, dann könnte man die regularisierte X-Ray-Transformierte

$$\tilde{f}(\mathbf{y}, \omega) = \left(e^{-i\mathbf{p}\mathbf{y}} \Phi, \tilde{V}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{y}} \Psi \right)$$

betrachten und daraus wie bei Satz 5.2 das Potential V rekonstruieren.

Kapitel 7

Inverse Streutheorie für den Dirac-Operator

Der Dirac-Operator ist $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ im Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C}^\mu)$. Zu dessen grundlegenden Eigenschaften vergleiche Abschnitt 3.4, zu kurzreichweitigen Potentialen vergleiche Abschnitt 4.4 und 4.5. Wir untersuchen den Hochenergielimes von $e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}$ in Abschnitt 1 und den von $e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}NW} S_\pm e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}NW}$ in Abschnitt 2. Damit wird in Abschnitt 3 die Rekonstruktion elektromagnetischer Felder aus Streudaten möglich. In Abschnitt 4 werden die Resultate auf zweidimensionale Magnetfelder mit kompaktem Träger verallgemeinert.

7.1 Der Hochenergielimes von S

Der Hochenergielimes von $e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}$ ergibt auch bei der Dirac-Gleichung eine X-Ray-Transformierte im Exponenten. Dabei tritt allerdings nicht die Potentialmatrix V auf, sondern nur der Anteil $V_{+,\omega}$, der mit $\alpha \cdot \omega$ kommutiert.

Lemma 7.1 (Zerlegung von V) *Sei V eine Potentialmatrix zum Dirac-Operator $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ und $\omega \in S^{\nu-1}$. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung*

$$V = V_{+,\omega} + V_{-,\omega} \text{ mit } [V_{+,\omega}, \alpha \cdot \omega] = 0 \text{ und } \{V_{-,\omega}, \alpha \cdot \omega\} = 0, \text{ also}$$

$$\alpha \cdot \omega V_{\pm,\omega} = \pm V_{\pm,\omega} \alpha \cdot \omega. \text{ Es gilt } V_{\pm,\omega} = 1/2(V \pm \alpha \cdot \omega V \alpha \cdot \omega) .$$

Im Fall eines elektromagnetischen Feldes, also $V = A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}$, ergibt sich

$$V_{+,\omega} = A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}^\parallel \text{ und } V_{-,\omega} = -\alpha \cdot \mathbf{A}^\perp$$

mit der orthogonalen Zerlegung (bezüglich ω):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\parallel + \mathbf{A}^\perp, \quad \mathbf{A}^\parallel = (\omega \cdot \mathbf{A})\omega, \quad \omega \cdot \mathbf{A}^\perp = 0$$

Beweis: Aus der Vertauschungsrelation

$$\{\alpha_i, \alpha_k\} = 2\delta_{ik} \text{ folgt für Vektoren } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^\nu : \{\alpha \cdot \mathbf{a}, \alpha \cdot \mathbf{b}\} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \text{ und } (\alpha \cdot \mathbf{a})^2 = \mathbf{a}^2.$$

Damit gilt $(\alpha \cdot \omega)^2 = 1$, und es folgt

$$\alpha \cdot \omega (V \pm \alpha \cdot \omega V \alpha \cdot \omega) = \alpha \cdot \omega V \pm V \alpha \cdot \omega = \pm (V \alpha \cdot \omega \pm \alpha \cdot \omega V) = \pm (V \pm \alpha \cdot \omega V \alpha \cdot \omega) \alpha \cdot \omega,$$

so daß $1/2(V \pm \alpha \cdot \omega V \alpha \cdot \omega)$ die geforderten Eigenschaften haben.

Zur Eindeutigkeit: Aus $\alpha \cdot \omega \tilde{V} = \tilde{V} \alpha \cdot \omega$ und $\alpha \cdot \omega \tilde{V} = -\tilde{V} \alpha \cdot \omega$ folgt $\tilde{V} = 0$.

Im Fall des elektromagnetischen Feldes gilt einerseits $A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}^\parallel = A_0 - \alpha \cdot \omega \omega \cdot \mathbf{A}$ und damit $[A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}^\parallel, \alpha \cdot \omega] = 0$, und andererseits $\{-\alpha \cdot \mathbf{A}^\perp, \alpha \cdot \omega\} = -2\omega \cdot \mathbf{A}^\perp = 0$.

■

Die inverse Streutheorie für die Dirac-Gleichung beruht auf dem folgenden

Satz 7.2 (Hochenergielimes von S) Sei $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ und $\mathbf{v} = v\omega$ mit $\omega \in S^{\nu-1}$. Die Komponenten der Potentialmatrix V seien stetig mit integrierbarem Abfall: $\|VF(|\mathbf{x}| \geq R)\| \in L^1([0, \infty), dR)$. Ferner gelte für $V_{+, \omega}$ gemäß Lemma 7.1: $[V_{+, \omega}(\mathbf{x}_1), V_{+, \omega}(\mathbf{x}_2)] = 0$ für $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^\nu$. Dann ist

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} V_{+, \omega}(\mathbf{x} + \omega t) dt \right\} \quad (7.1)$$

Für ein elektromagnetisches Feld $V = A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}$ gilt

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}^\parallel)(\mathbf{x} + \omega t) dt \right\} \quad (7.2)$$

mit $\mathbf{A}^\parallel = (\omega \cdot \mathbf{A})\omega$.

Die Aussage für $V = A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}$ folgt aus (7.1) mit $V_{+, \omega} = A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}^\parallel$. Wegen $\alpha \cdot \mathbf{A}^\parallel = \alpha \cdot \omega \omega \cdot \mathbf{A}$ ist die Voraussetzung $[V_{+, \omega}(\mathbf{x}_1), V_{+, \omega}(\mathbf{x}_2)] = 0$ erfüllt. Sofern diese Voraussetzung für ein V nicht erfüllt ist, gilt (7.1) noch im Sinne eines zeitgeordneten Produktes.

Ein skalares Potential läßt sich (für $\nu \geq 2$) wie beim skalaren relativistischen Operator rekonstruieren, und in Abschnitt 7.3 zeigen wir, daß sich ein elektromagnetisches Feld bei der Dirac-Gleichung bis auf die Eichfreiheit rekonstruieren läßt. Wenn man jedoch keinerlei Voraussetzungen an die Struktur der Potentialmatrix stellt, dann läßt sich V nicht eindeutig mittels (7.1) rekonstruieren, denn für $V = \beta\Phi$ mit $\Phi : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$ ist $V_{+, \omega} = 0$ und damit $s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} = 1$.

Vorbemerkung zum Beweis: Wir haben in Satz 3.6 die freie Zeitentwicklung $(e^{-iH_0t}e^{iv\mathbf{x}}\Psi)(\mathbf{x})$ für $|\mathbf{x}| \leq |t|/2$ abgeschätzt und damit in Satz 4.13 eine integrierbare Majorante $h(t)$ für $\|V e^{-iH_0t}e^{iv\mathbf{x}}\Psi\|$ erhalten. Damit zeigen wir im folgenden Lemma 7.3, daß $e^{iH_0t}e^{-i2Ht}e^{iH_0t} \rightarrow S$ zwischen „gutartigen“ Zuständen $e^{iv\mathbf{x}}\Phi$, $e^{iv\mathbf{x}}\Psi$ gleichmäßig bezüglich v gilt. Lemma 7.4 liefert die Dyson-Entwicklung für $e^{iH_0t}e^{-i2Ht}e^{iH_0t}$, und damit erhalten wir in Lemma 7.5

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-iv\mathbf{x}} e^{iH_0t} e^{-i2Ht} e^{iH_0t} e^{iv\mathbf{x}} = \exp \left\{ -i \int_{-t}^t ds V_{+, \omega}(\mathbf{x} + \omega s) \right\}.$$

Mit einer Vertauschung von $\lim_{v \rightarrow \infty}$ und $\lim_{t \rightarrow \infty}$ aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz ergibt sich schließlich Satz 7.2.

Lemma 7.3 gilt für allgemeine kurzreichweitige Potentiale nach Definition 4.10. Vermutlich bleibt Satz 7.2 auch für Potentiale mit lokalen Singularitäten gültig, doch die Dyson-Entwicklung ist nur für ein beschränktes V anwendbar. Unser Beweis läßt sich zwar auf $V \in L^\infty$ (mit integrierbarem Abfall) ausdehnen, doch für ein unbeschränktes V wäre eine andere Beweisidee erforderlich.

Lemma 7.3 (Approximation von S) Sei $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ und V eine kurzreichweitige Potentialmatrix nach Definition 4.10. Seien $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}$ Zustände mit $\hat{\phi}, \hat{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C}^\mu)$. Dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\Phi, e^{-iv\mathbf{x}} e^{iH_0t} e^{-i2Ht} e^{iH_0t} e^{iv\mathbf{x}} \Psi \right) = \left(\Phi, e^{-iv\mathbf{x}} S e^{iv\mathbf{x}} \Psi \right) \quad (7.3)$$

gleichmäßig in $v \geq v_0$.

Beweis: Es gilt

$$e^{-iv\mathbf{x}} e^{iHt} e^{-iH_0t} e^{iv\mathbf{x}} \Phi = \Phi + i \int_0^t ds e^{-iv\mathbf{x}} e^{iHS} V e^{-iH_0s} e^{iv\mathbf{x}} \Phi.$$

Der Integrand läßt sich nach Lemma 4.13 für $v \geq v_0$ durch $h(s)$ mit $h \in L^1$ abschätzen. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|e^{-iv\mathbf{x}} \Omega_+ e^{iv\mathbf{x}} \Phi - e^{-iv\mathbf{x}} e^{iHt} e^{-iH_0t} e^{iv\mathbf{x}} \Phi\| &= \left\| i \int_t^\infty ds e^{-iv\mathbf{x}} e^{iHS} V e^{-iH_0s} e^{iv\mathbf{x}} \Phi \right\| \\ &\leq \int_t^\infty ds h(s) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Zusammen mit der analogen Aussage für Ω_- folgt die Behauptung für S . ■

Lemma 7.4 (Dyson-Reihe) Sei $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ und V eine beschränkte Potentialmatrix. Dann gilt für $\Psi \in \mathcal{H}$ und $t > 0$:

$$e^{iH_0 t} e^{-i2Ht} e^{iH_0 t} \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-t < t_1 < \dots < t_n < t} dt_n \dots dt_1 V(t_n) \dots V(t_1) \Psi \quad (7.4)$$

mit $V(\tau) = e^{iH_0 \tau} V e^{-iH_0 \tau}$.

Beweis: Wir definieren für $t, s \in \mathbb{R}$ und $\Psi \in \mathcal{H}$:

$$U_1(t, s) \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_s^t dt_n \dots \int_s^{t_3} dt_2 \int_s^{t_2} dt_1 V(t_n) \dots V(t_1) \Psi .$$

$V(\cdot)$ ist stark stetig, und die Integrale lassen sich wahlweise als Riemann- oder Bochner-Integrale interpretieren. Die Reihe für U_1 konvergiert bezüglich der Operator-Norm, da sich der n -te Summand durch $1/n! (|t - s| \cdot \|V\|)^n \|\Psi\|$ abschätzen läßt. Nach [29, Theorem X.69] ist $U_1(t, s)$ unitär und stark differenzierbar mit

$$i \frac{\partial}{\partial t} U_1(t, s) \Psi = V(t) U_1(t, s) \Psi \quad \text{und} \quad U_1(s, s) \Psi = \Psi .$$

Dieses Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar. Setze

$$U_2(t, s) \Psi = e^{iH_0 t} e^{-iHt} e^{iHs} e^{-iH_0 s} \Psi ,$$

dann ist $U_2(t, s)$ unitär, $U_2(s, s) = 1$ und zumindest für $\Psi \in D(H) = D(H_0)$ gilt

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U_2(t, s) \Psi &= e^{iH_0 t} V e^{-iHt} e^{iHs} e^{-iH_0 s} \Psi \\ &= e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} e^{-iHt} e^{iHs} e^{-iH_0 s} \Psi \\ &= V(t) U_2(t, s) \Psi . \end{aligned}$$

Damit gilt $U_2(t, s) = U_1(t, s)$, und für $t > 0, s = -t$ folgt die Behauptung. ■

Diese Reihe erhält man dadurch, daß man die Evolutionsgleichung im Wechselwirkungsbild als Integralgleichung schreibt und eine Fixpunktiteration durchführt. Wir haben auf den allgemeineren Satz in [29] zurückgegriffen, um den Beweis abzukürzen. Wir benötigen die Dyson-Reihe zum Beweis des folgenden

Lemma 7.5 (Hochenergielimes für endliches t) Sei $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$, $\omega \in S^{\nu-1}$ und V eine Potentialmatrix mit stetigen, beschränkten Komponenten. Mit $V_{+, \omega}$ gemäß Lemma 7.1 sei $[V_{+, \omega}(\mathbf{x}_1), V_{+, \omega}(\mathbf{x}_2)] = 0$ für $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^\nu$. Dann gilt für $t > 0$:

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-iv\mathbf{x}} e^{iH_0 t} e^{-i2Ht} e^{iH_0 t} e^{iv\mathbf{x}} = \exp \left\{ -i \int_{-t}^t ds V_{+, \omega}(\mathbf{x} + \omega s) \right\} . \quad (7.5)$$

Beweis: Mit der Zerlegung $V = V_{+, \omega} + V_{-, \omega}$ gemäß Lemma 7.1 definieren wir die stark stetigen Familien beschränkter Operatoren

$W_{\pm, \omega}(\tau) = e^{i\alpha \cdot \omega \omega \cdot \mathbf{p} \tau} V_{\pm, \omega} e^{-i\alpha \cdot \omega \omega \cdot \mathbf{p} \tau}$. Wegen $[\alpha \cdot \omega, V_{+, \omega}] = 0$ ist

$$W_{+, \omega}(\tau) = 1/2 (1 + \alpha \cdot \omega) V_{+, \omega}(\mathbf{x} + \omega \tau) + 1/2 (1 - \alpha \cdot \omega) V_{+, \omega}(\mathbf{x} - \omega \tau) .$$

Wir zeigen, daß mit $V(\tau) = e^{iH_0 \tau} V e^{-iH_0 \tau}$ für $\Psi \in \mathcal{H}$, $t > 0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{-t < t_1 < \dots < t_n < t} dt_n \dots dt_1 e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} V(t_n) \dots V(t_1) e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \\ &= \int_{-t < t_1 < \dots < t_n < t} dt_n \dots dt_1 W_{+, \omega}(t_n) \dots W_{+, \omega}(t_1) \Psi \end{aligned} \quad (7.6)$$

gilt und erhalten damit folgendes: Wegen $[V_{+, \omega}(\mathbf{x}_1), V_{+, \omega}(\mathbf{x}_2)] = 0$ und $[\alpha \cdot \omega, V_{+, \omega}] = 0$ ist $[W_{+, \omega}(t'), W_{+, \omega}(t'')] = 0$, daher kann man die Zeitordnung in (7.6) auflösen und erhält

$$\frac{1}{n!} \int_{[-t, t]^n} dt_n \dots dt_1 W_{+, \omega}(t_n) \dots W_{+, \omega}(t_1) \Psi = \frac{1}{n!} \left(\int_{-t}^t ds W_{+, \omega}(s) \right)^n \Psi .$$

Da die Dyson-Reihe (Lemma 7.4) für $e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} e^{iH_0 t} e^{-i2Ht} e^{iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}$ gleichmäßig bezüglich v konvergiert, dürfen wir den $\lim_{v \rightarrow \infty}$ mit der $\sum_{n=0}^{\infty}$ vertauschen und es folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} e^{iH_0 t} e^{-i2Ht} e^{iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\int_{-t}^t ds W_{+, \omega}(s) \right)^n \Psi = \exp \left\{ -i \int_{-t}^t ds W_{+, \omega}(s) \right\} . \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie des Integrationsintervalls ist $\int_{-t}^t ds W_{+, \omega}(s) = \int_{-t}^t ds V_{+, \omega}(\mathbf{x} + \omega s)$. Zum Beweis von (7.6) betrachten wir

$$e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} V(\tau) e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} = e^{i(\alpha \cdot \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta m)\tau} V e^{-i(\alpha \cdot \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta m)\tau} .$$

Mit Lemma 3.5 ergibt sich

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} \left(e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} V(\tau) e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} - e^{i\alpha \cdot \omega (v + \omega \cdot \mathbf{p}) \tau} V e^{-i\alpha \cdot \omega (v + \omega \cdot \mathbf{p}) \tau} \right) = 0 .$$

Mit der Zerlegung $V = V_{+, \omega} + V_{-, \omega}$ und $\alpha \cdot \omega V_{\pm, \omega} = \pm V_{\pm, \omega} \alpha \cdot \omega$ folgt $V_{\pm, \omega} e^{-i\alpha \cdot \omega v \tau} = e^{\mp i\alpha \cdot \omega v \tau} V_{\pm, \omega}$, also

$$\begin{aligned} & e^{i\alpha \cdot \omega (v + \omega \cdot \mathbf{p}) \tau} V e^{-i\alpha \cdot \omega (v + \omega \cdot \mathbf{p}) \tau} \\ &= e^{i\alpha \cdot \omega \omega \cdot \mathbf{p} \tau} \left(V_{+, \omega} + e^{2i\alpha \cdot \omega v \tau} V_{-, \omega} \right) e^{-i\alpha \cdot \omega \omega \cdot \mathbf{p} \tau} \\ &= W_{+, \omega}(\tau) + e^{2i\alpha \cdot \omega v \tau} W_{-, \omega}(\tau) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Damit ist} \quad & \lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^b dt_1 e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} V(t_1) e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \\
& = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^b dt_1 \left(W_{+,\omega}(t_1) + e^{2i\alpha \cdot \omega v t_1} W_{-,\omega}(t_1) \right) \Psi \\
& = \int_a^b dt_1 W_{+,\omega}(t_1) \Psi, \tag{7.7}
\end{aligned}$$

denn nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma ist $\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^b dt_1 e^{\pm 2i v t_1} f(t_1) = 0$ für jede stetige Funktion f . Damit ist (7.6) für $n = 1$ bewiesen. Für $n = 2$ erhalten wir aus (7.7)

$$\begin{aligned}
& \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{-t}^t dt_2 \int_{-t}^{t_2} dt_1 e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} V(t_2) V(t_1) e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \Psi \\
& = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{-t}^t dt_2 \left(W_{+,\omega}(t_2) + e^{2i\alpha \cdot \omega v t_2} W_{-,\omega}(t_2) \right) \int_{-t}^{t_2} dt_1 W_{+,\omega}(t_1) \Psi
\end{aligned}$$

und da $W_{-,\omega}(t_2) \int_{-t}^{t_2} dt_1 W_{+,\omega}(t_1) \Psi$ stetig ist, kann man wieder das Riemann-Lebesgue-Lemma anwenden. Mit diesem Argument wird nun (7.6) mit vollständiger Induktion bewiesen, und damit folgt die Behauptung von Satz 7.5. ■

Im Beweis wurde die Symmetrie des Integrationsintervalls ausgenutzt, um $W_{+,\omega}$ durch $V_{+,\omega}$ zu ersetzen. Alternativ kann man auch statt S die Wellenoperatoren einzeln untersuchen, dazu erhält man analog für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} e^{iHt} e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} & = \exp \left\{ i \int_0^t ds W_{+,\omega}(s) \right\} \\
& = e^{i\{\alpha\omega \cdot \mathbf{p} + V_{+,\omega}\}t} e^{-i\alpha\omega t}.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} \left(e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} e^{-iHt} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} - e^{-i\{\alpha\omega(v+\omega\mathbf{p})+V_{+,\omega}\}t} \right) = 0.$$

Wenn es gelingt, letzteres für ein allgemeineres V ohne Verwendung der Dyson-Reihe zu zeigen, dann kann man damit Satz 7.2 in derselben Weise verallgemeinern wie Satz 6.1 beim skalaren relativistischen Hamiltonoperator.

Beweis von Satz 7.2: Die Potentialmatrix V erfülle die geforderten Voraussetzungen. Seien $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}$ mit $\hat{\phi}, \hat{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C}^\mu)$ und sei $\varepsilon > 0$. Wir wollen mit der $\varepsilon/3$ -Methode die Grenzwerte $v \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$ vertauschen und betrachten dazu die Zerlegung

$$\begin{aligned}
& \left| \left(\Phi, e^{-i\nu\mathbf{x}} S e^{i\nu\mathbf{x}} \Psi \right) - \left(\Phi, e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} ds V_{+,\omega}(\mathbf{x} + \omega s)} \Psi \right) \right| \\
& \leq \left| \left(\Phi, e^{-i\nu\mathbf{x}} S e^{i\nu\mathbf{x}} \Psi \right) - \left(\Phi, e^{-i\nu\mathbf{x}} e^{iH_0 t} e^{-i2Ht} e^{iH_0 t} e^{i\nu\mathbf{x}} \Psi \right) \right| \\
& + \left| \left(\Phi, e^{-i\nu\mathbf{x}} e^{iH_0 t} e^{-i2Ht} e^{iH_0 t} e^{i\nu\mathbf{x}} \Psi \right) - \left(\Phi, e^{-i \int_{-t}^t ds V_{+,\omega}(\mathbf{x} + \omega s)} \Psi \right) \right| \\
& + \left| \left(\Phi, e^{-i \int_{-t}^t ds V_{+,\omega}(\mathbf{x} + \omega s)} \Psi \right) - \left(\Phi, e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} ds V_{+,\omega}(\mathbf{x} + \omega s)} \Psi \right) \right|.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.11 ist V kurzreichweitig und mit Lemma 7.3 folgt: Es gibt Konstanten $t_0, v_0 \geq 0$ so, daß

$$\left| \left(\Phi, e^{-i\nu\mathbf{x}} S e^{i\nu\mathbf{x}} \Psi \right) - \left(\Phi, e^{-i\nu\mathbf{x}} e^{iH_0 t} e^{-i2Ht} e^{iH_0 t} e^{i\nu\mathbf{x}} \Psi \right) \right| < \varepsilon/3 \text{ für } v \geq v_0, t \geq t_0.$$

Ferner gilt $s - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t ds V_{+,\omega}(\mathbf{x} + \omega s) = \int_{-\infty}^{\infty} ds V_{+,\omega}(\mathbf{x} + \omega s)$, daher gibt es ein $t_1 \geq 0$ so, daß für $t \geq t_1$

$$\left| \left(\Phi, e^{-i \int_{-t}^t ds V_{+,\omega}(\mathbf{x} + \omega s)} \Psi \right) - \left(\Phi, e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} ds V_{+,\omega}(\mathbf{x} + \omega s)} \Psi \right) \right| < \varepsilon/3$$

gilt. Wähle nun ein festes $t \geq \max(t_0, t_1)$. Da die Komponenten von V stetig und beschränkt sind, folgt mit Lemma 7.5: Es gibt ein $v_1 \geq v_0$ so, daß für $v \geq v_1$

$$\left| \left(\Phi, e^{-i\nu\mathbf{x}} e^{iH_0 t} e^{-i2Ht} e^{iH_0 t} e^{i\nu\mathbf{x}} \Psi \right) - \left(\Phi, e^{-i \int_{-t}^t ds V_{+,\omega}(\mathbf{x} + \omega s)} \Psi \right) \right| < \varepsilon/3$$

gilt. Damit ist für $v \geq v_1$

$$\left| \left(\Phi, e^{-i\nu\mathbf{x}} S e^{i\nu\mathbf{x}} \Psi \right) - \left(\Phi, e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} ds V_{+,\omega}(\mathbf{x} + \omega s)} \Psi \right) \right| < \varepsilon.$$

Da die Zustände mit $\hat{\phi}, \hat{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C}^\mu)$ dicht in \mathcal{H} sind, folgt zunächst als schwacher Grenzwert

$$w - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\nu\mathbf{x}} S e^{i\nu\mathbf{x}} = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} V_{+,\omega}(\mathbf{x} + \omega t) dt \right\}.$$

Die starke Konvergenz ergibt sich nun mit Lemma 2.4, da $e^{-i\nu\mathbf{x}} S e^{i\nu\mathbf{x}}$ und sein schwacher Grenzwert unitär sind. ■

7.2 Der Hochenergielimes von S_{\pm}

Wir haben in Abschnitt 3.5 die Foldy-Wouthuysen-Darstellung der Dirac-Theorie für $m > 0$ vorgestellt. Mit $U(\cdot) : \mathbb{R}^{\nu} \rightarrow \mathbb{C}^{\mu \times \mu}$, $\mathbf{p} \mapsto \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \left(1 + \beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \right)$ ist $\hat{\psi}_{FW}(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}) \hat{\psi}(\mathbf{q})$ die FW-Impulsdarstellung und $\psi_{FW}(\mathbf{y})$ die FW-Ortsdarstellung. Der Newton-Wigner-Ortsoperator ist in dieser Darstellung der Multiplikationsoperator mit der Koordinate \mathbf{y} . Aus den Vertauschungsrelationen (3.4) folgt $U(\mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)U^{-1}(\mathbf{p}) = E\beta$ (Lemma 3.9). Im Fall $\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$ gilt also in der FW-Darstellung $H_0 = \begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -E \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} S_+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_- \end{pmatrix}$ mit $S_{\pm} = S|_{\mathcal{H}_{\pm}}$ und $\mathcal{H}_{\pm} = \mathcal{H}(H_0 = \pm E)$. Wir wollen nun den Hochenergielimes von $e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} S_{\pm} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}}$ bestimmen. Dies ist sinnvoll, da \mathbf{x}_{NW} die Teilräume \mathcal{H}_{\pm} invariant läßt. Die entsprechenden Restriktionen seien ebenfalls mit \mathbf{x}_{NW} bezeichnet. Die Untersuchung von S_{\pm} entspricht einem Streuexperiment, das nur mit Elektronen positiver Energie (bzw. mit Positronen) durchgeführt wird, was physikalisch realistischer ist als die Verwendung gemischter Zustände. Wir betrachten nur elektromagnetische Felder $V = A_0 - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}$, doch dies wäre leicht zu verallgemeinern. (Zu beachten ist, daß diese Form von V nur in der Standard-Darstellung gültig ist, in der FW-Darstellung ist $\boldsymbol{\alpha}$ durch $U(\mathbf{q})\boldsymbol{\alpha}U^*(\mathbf{q})$ zu ersetzen.)

Satz 7.6 (Hochenergielimes von S_{\pm}) *Seien $m > 0$, A_0 und \mathbf{A} stetig mit integrierbarem Abfall und $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\omega}$ mit $\boldsymbol{\omega} \in S^{\nu-1}$. Dann gilt*

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} S_{\pm} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 \mp \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt \right\}. \quad (7.8)$$

Im folgenden Abschnitt werden wir hiermit das elektromagnetische Feld aus S_+ rekonstruieren.

Der Hochenergie-Limes von S_{\pm} ist ein skalarer Operator in $L^2(\mathbb{R}^{\nu}, \mathbb{C}^{\mu/2})$, d.h. er sieht den Spin der Elektronen nicht. Dies gilt nicht bei endlicher Energie, denn beim Stern-Gerlach-Versuch werden Elektronen in einem inhomogenen Magnetfeld je nach Spin unterschiedlich abgelenkt.

Für „gutartige“ $\Psi \in \mathcal{H}_+$ ist $e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} \Psi$ bei $\mathbf{x}_{NW} = \omega t$ konzentriert, die freie Zeitentwicklung entspricht der des skalaren relativistischen Hamiltonoperators. Auch hier ist für $v \rightarrow \infty$ das Zerfließen der Wellenfunktion gegenüber der Translationsbewegung zu vernachlässigen, dadurch kommt (7.8) zustande. Vergleiche dazu die Diskussion in Abschnitt 6.1.

$S_{kl} = - \int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 \mp \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt$ läßt sich als klassische Wirkung deuten, und in einer semi-klassischen Näherung erwartet man auch, daß $S \simeq e^{iS_{kl}/\hbar}$ gilt.

Wir führen Satz 7.6 auf Satz 7.2 für $e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}}S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}$ zurück. Man könnte ihn auch direkt beweisen, indem man Analoga der Sätze 3.6, 4.13 und der Lemmata 7.3, 7.5 mit $e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}}$ statt $e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}$ beweist.

Beweis von Satz 7.6: Nach Lemma 3.10 gilt $\mathbf{x}_{NW} = \mathcal{U}^* \mathbf{x} \mathcal{U}$. Dabei ist der unitäre Operator $\mathcal{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ in der \mathbf{p} -Darstellung gegeben durch $U(\mathbf{p})$. Nun ist

$$\begin{aligned} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} S_{\pm} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} &= \mathcal{U}^* e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \mathcal{U} S_{\pm} \mathcal{U}^* e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \mathcal{U} \\ &= \mathcal{U}^* \left(e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \mathcal{U} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \right) \left(e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S_{\pm} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \right) \left(e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \mathcal{U}^* e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} \right) \mathcal{U} . \end{aligned}$$

In der Standarddarstellung ist $\mathcal{U} = U(\mathbf{p})$ und damit $e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \mathcal{U} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} = U(\mathbf{p} + \mathbf{v})$. In der FW-Darstellung gilt zwar $\mathcal{U} = U(\mathbf{q})$, aber

$$e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} \mathcal{U} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} = U(\mathbf{q}) U(\mathbf{q} + \mathbf{v}) U^*(\mathbf{q}) \neq U(\mathbf{q} + \mathbf{v}) \text{ für } \mathbf{v} \neq 0 .$$

Wir verwenden daher die Standarddarstellung, d.h. eine beliebige Kombination von \mathbf{x} - und \mathbf{p} -Darstellung, und erhalten (nach Lemma 2.2 1.)

$$\begin{aligned} s - \lim_{v \rightarrow \infty} U(\mathbf{p} + \mathbf{v}) &= s - \lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{v})^2 + m^2} + m}{2\sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{v})^2 + m^2}}} \left(\mathbf{1} + \beta \frac{\alpha \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{v})}{\sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{v})^2 + m^2 + m}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \beta \alpha \cdot \omega) , \end{aligned}$$

und mit $s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}} = \exp\{-i \int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}^{\parallel})(\mathbf{x} + \omega t) dt\}$ nach Satz 7.2 folgt

$$\begin{aligned} &s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} \\ &= U^*(\mathbf{p}) \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \beta \alpha \cdot \omega) e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}^{\parallel})(\mathbf{x} + \omega t) dt} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \beta \alpha \cdot \omega) U(\mathbf{p}) \\ &= U^*(\mathbf{p}) e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 - \beta \omega \cdot \mathbf{A})(\mathbf{x} + \omega t) dt} U(\mathbf{p}) , \end{aligned} \tag{7.9}$$

denn es gilt $\alpha \cdot \mathbf{A}^{\parallel} = \alpha \cdot \omega \omega \cdot \mathbf{A}$ und

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \beta \alpha \cdot \omega) \alpha \cdot \omega \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \beta \alpha \cdot \omega) &= \frac{1}{2} (\alpha \cdot \omega + \beta) (1 - \beta \alpha \cdot \omega) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha \cdot \omega + \beta - \alpha \cdot \omega \beta \alpha \cdot \omega - \alpha \cdot \omega) \\ &= \beta \end{aligned}$$

wegen $\beta^2 = (\alpha \cdot \omega)^2 = 1$ und $\{\alpha \cdot \omega, \beta\} = 0$. Der Beweis von Satz 7.6 läßt sich nun auf zwei Arten vollenden:

1. Durch Übergang zur FW-Darstellung in (7.9) wird

$$U^*(\mathbf{p})\left(A_0 - \beta \omega \cdot \mathbf{A}\right)(i\nabla_{\mathbf{p}} + \omega t)U(\mathbf{p}) \quad \text{zu} \quad \left(A_0 - \beta \omega \cdot \mathbf{A}\right)(i\nabla_{\mathbf{q}} + \omega t) .$$

Es ist $S_{\pm} = S|_{\mathcal{H}_{\pm}}$, und in der FW-Darstellung gilt $\mathcal{H}_{\pm} = \mathcal{H}(\beta = \pm 1)$. Mit $i\nabla_{\mathbf{q}} = \mathbf{y}$ folgt

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{y}} S_{\pm} e^{i\mathbf{v}\mathbf{y}} = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A_0 \mp \omega \cdot \mathbf{A} \right) (\mathbf{y} + \omega t) dt \right\} .$$

2. Oder wir bleiben in der Standarddarstellung:

$$\begin{aligned} & U^*(\mathbf{p})\left(A_0 - \beta \omega \cdot \mathbf{A}\right)(\mathbf{x} + \omega t)U(\mathbf{p}) \\ &= A_0\left(U^*(\mathbf{p})\mathbf{x}U(\mathbf{p}) + \omega t\right) - U^*(\mathbf{p})\beta U(\mathbf{p})\omega \cdot \mathbf{A}\left(U^*(\mathbf{p})\mathbf{x}U(\mathbf{p}) + \omega t\right) \\ &= A_0(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) - \text{sign}(H_0)\omega \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) \end{aligned}$$

wegen $U^*(\mathbf{p})\beta U(\mathbf{p}) = H_0/|H_0| = \text{sign}(H_0)$ nach Lemma 3.9. Also gilt unabhängig von der Darstellung

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} S e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A_0 - \text{sign}(H_0)\omega \cdot \mathbf{A} \right) (\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt \right\} .$$

Mit $S_{\pm} = S|_{\mathcal{H}_{\pm}}$ und $\mathcal{H}_{\pm} = \mathcal{H}(\text{sign}(H_0) = \pm 1)$ folgt die Behauptung.

Damit ist Satz 7.6 bewiesen. ■

Durch Übertragung der Beweise zu den Sätzen 7.2 und 7.6 ergibt sich für die Wellenoperatoren

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} \Omega_{\pm} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} = \exp \left\{ i \int_0^{\pm\infty} \left(A_0 - \text{sign}(H_0)\omega \cdot \mathbf{A} \right) (\mathbf{x}_{NW} + \text{sign}(H_0)\omega t) dt \right\} .$$

Mit Lemma 2.3 folgt, daß eine analoge Aussage für Ω_{\pm}^* gilt. Vergleiche dazu die Bemerkungen beim skalaren relativistischen Hamiltonoperator (S. 59). Mit der Kettenregel für Wellenoperatoren [30, p. 18] erhält man dann

$$\begin{aligned} & w - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} S_{\pm}(H_0 + A'_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}', H_0 + A''_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}'') e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} \\ &= \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} \left((A''_0 - A'_0) - \omega \cdot (\mathbf{A}'' - \mathbf{A}') \right) (\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt \right\} . \end{aligned}$$

Hier kann man aus der starken Konvergenz der Wellenoperatoren auf die schwache Konvergenz der S -Matrix schließen, da diese aber i.a. nicht unitär in \mathcal{H} ist, folgt daraus keine starke Konvergenz. Diese Formel wäre wohl nur schwer direkt

(d.h. ohne Satz 7.6) zu zeigen, da man dazu die Zeitentwicklung des „freien“ Hamiltonoperators $H_0 + A'_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}'$ abschätzen müßte. Insbesondere folgt

$$\begin{aligned} w - \lim_{v \rightarrow \infty} & e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} S_+(H_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}, H_0 + A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}) e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} \\ &= \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt \right\} \quad \text{und} \\ w - \lim_{v \rightarrow \infty} & e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} S_+(H_0 + A_0, H_0 + A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}) e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} \\ &= \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt \right\}. \end{aligned}$$

Man könnte also bei bekanntem \mathbf{A} auch $H_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}$ als „freien“ Hamiltonoperator der Vergleichszeitentwicklung nehmen, um A_0 zu rekonstruieren. Dies ist wohl für die praktische Rekonstruktion nicht so interessant, doch es zeigt, daß man auch in manchen Fällen Aussagen über die Asymptotik von S machen kann, wo die freie Zeitentwicklung sich nicht gut abschätzen läßt.

Bei großen Impulsen ist der Unterschied von \mathbf{x} und \mathbf{x}_{NW} vernachlässigbar. Für ein skalares Potential A_0 sehen wir nun, daß der Hochenergielimes von S für $A_0(\mathbf{x})$ und $A_0(\mathbf{x}_{NW})$ derselbe ist: Für ein beschränktes, integrierbar abfallendes Potential A_0 ist einerseits

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} S_{\pm}(H_0, H_0 + A_0(\mathbf{x})) e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt \right\}.$$

In der FW-Darstellung läßt sich $H_0 + A_0(\mathbf{x}_{NW})$ auf den skalaren relativistischen Hamiltonoperator zurückführen und mit Satz 6.1 folgt für ein allgemeineres A_0 andererseits auch

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} S_{\pm}(H_0, H_0 + A_0(\mathbf{x}_{NW})) e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt \right\}.$$

Zur Verallgemeinerung von Satz 7.6 würde es daher genügen,

$$w - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} \left(e^{i(H_0 + A_0(\mathbf{x}))t} - e^{i(H_0 + A_0(\mathbf{x}_{NW}))t} \right) e^{-iH_0 t} e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} = 0$$

für allgemeineres A_0 zu zeigen. Für ein beschränktes, integrierbar abfallendes A_0 ist dies leicht zu zeigen, und damit erhalten wir einen neuen Beweis der Sätze 7.2 und 7.6 für den Fall eines skalaren Potentials.

7.3 Rekonstruktion elektromagnetischer Felder

Wir wollen nun die Aussagen über den Hochenergielimes von S zur Rekonstruktion des elektromagnetischen Feldes verwenden. Da S bezüglich der Eichtransformation des Vektorpotentials $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla\lambda$ mit $\lim_{|\mathbf{x}|\rightarrow\infty} \lambda(\mathbf{x}) = 0$ invariant ist, läßt sich \mathbf{A} nur bis auf Eichfreiheit rekonstruieren. Unsere Methode funktioniert nur für $\nu \geq 2$, da sie auf der X-Ray-Transformation beruht. Diese reduziert sich im Eindimensionalen auf eine Zahl und ist daher nicht injektiv.

Satz 7.7 (Rekonstruktion des elektromagnetischen Feldes)

Sei $\nu \geq 2$, $m > 0$ und

$$\mathcal{V} := \left\{ (A_0, \mathbf{A}) \mid A_i \in C^0(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R}), \|A_i \chi(|\mathbf{x}| \geq R)\|_\infty \in L^1, \mathbf{A} \in L^2(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R}^\nu) \right\} .$$

Dann sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) , & (A_0, \mathbf{A}) &\mapsto S \\ \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_+), & (A_0, \mathbf{A}) &\mapsto S_+ \\ \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_-), & (A_0, \mathbf{A}) &\mapsto S_- \end{aligned}$$

injektiv bis auf Eichfreiheit, d.h. durch S , S_+ oder S_- ist A_0 eindeutig und \mathbf{A} bis auf einen Gradienten bestimmt.

Die Aussage für S bleibt auch für $m = 0$ gültig.

Insbesondere sind $\mathbf{E} = -\text{grad } A_0$ und $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ durch S , S_+ oder S_- eindeutig bestimmt. Sie lassen sich also beispielsweise durch Streuexperimente mit Elektronen positiver Energie rekonstruieren (unter idealisierenden Annahmen über die Meßbarkeit der Streuphasen). Dabei ist es nicht erforderlich, den Spin der einlaufenden oder der gestreuten Elektronen zu messen. Wir führen den Beweis für S_+ und $m > 0$, S_- wird vollkommen analog behandelt. Die Aussage für S folgt daraus für $m > 0$, da S_+ durch S bestimmt ist. Andererseits läßt sich diese Aussage auch direkt aus Satz 7.2 herleiten, daher gilt sie auch für $m = 0$.

Beweis: Aus S_+ erhält man für alle $\omega \in S^{\nu-1}$ mit Satz 7.6

$$s - \lim_{\nu \rightarrow \infty} e^{-i\nu \mathbf{x}_{NW}} S_+ e^{i\nu \mathbf{x}_{NW}} = e^{-if(\mathbf{x}_{NW}, \omega)}$$

mit $f(\mathbf{x}_{NW}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt (A_0 - \omega \cdot \mathbf{A})(\mathbf{x}_{NW} + \omega t)$. Die Funktion f ist stetig und verschwindet für $|\mathbf{x}_{NW}^\perp| \rightarrow \infty$, daher läßt sie sich eindeutig aus e^{-if} gewinnen. Nun gilt

$$\tilde{A}_0(\mathbf{x}_{NW}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt A_0(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) = 1/2 (f(\mathbf{x}_{NW}, \omega) + f(\mathbf{x}_{NW}, -\omega)) \quad (7.10)$$

und mit Satz 2.16 erhält man A_0 . Ferner gilt

$$a(\mathbf{x}_{NW}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \omega \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) = 1/2 (f(\mathbf{x}_{NW}, -\omega) - f(\mathbf{x}_{NW}, \omega)), \quad (7.11)$$

und mit Satz 2.17 erhält man \mathbf{A} bis auf einen Gradienten. ■

Im Beweis von Satz 2.17 wurde die zusätzliche Voraussetzung $\mathbf{A} \in L^2$ benötigt. Sie stellt für $\nu = 2$ keine und für $\nu = 3$ nur eine geringfügige Einschränkung dar, da sie in den physikalisch besonders interessanten Fällen mit $\text{supp}(\mathbf{B})$ kompakt oder $\text{supp}(\mathbf{j})$ kompakt erfüllt ist (Lemma 2.11). Unter stärkeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an \mathbf{A} kann man auch auf die Forderung $\mathbf{A} \in L^2$ verzichten, wenn man die Rekonstruktion wie in Satz 2.18 vornimmt.

Wenn man eine Klasse von Magnetfeldern \mathbf{B} betrachtet, zu denen jeweils ein kurzreichweitiges \mathbf{A} existiert, etwa die kompakten Magnetfelder im \mathbb{R}^3 , dann ist die Abbildung $(A_0, \mathbf{B}) \mapsto S$ wohldefiniert. Satz 7.7 besagt nun, daß diese Abbildung injektiv ist.

Wir haben die Eindeutigkeitsaussage nur für eine spezielle Form der Potentialmatrix formuliert. Sie läßt sich im Standardbeispiel $\nu = 3$, $\mu = 4$ leicht auf paritätsverletzende Felder der Form

$$V = (A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}) + \gamma_5 (A'_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}') \quad \text{mit} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

ausdehnen. Mit den Sätzen 7.2, 7.6 kann man jedoch nicht eine beliebige Potentialmatrix V (mit stetigen, integrierbar abfallenden Komponenten) rekonstruieren, denn für $V = \beta \Phi$ mit $\Phi : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$ ist $V_{+, \omega} = 0$ und somit ist der Hochenergielimes $s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-iv\mathbf{x}} S e^{iv\mathbf{x}} = 1$ unabhängig von Φ .

7.4 Rekonstruktion kompakter Magnetfelder

Wir wollen die bisherigen Ergebnisse auf gewisse nicht-kurzreichweitige Magnetfelder ausdehnen. Zur Motivation betrachten wir Elektronen im Feld einer langen Spule. Sie sehen näherungsweise ein zweidimensionales Magnetfeld mit $|\mathbf{A}(\mathbf{x})| \sim 1/|\mathbf{x}|$ und $\int B \neq 0$. Im Fall der unendlich langen Spule ist $B(\mathbf{x}) = c\chi(|\mathbf{x}| < R)$. Wir untersuchen $B \in C_0^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, doch die Ergebnisse lassen sich vermutlich auf $B(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|^{2+\varepsilon})$ verallgemeinern. Nach Definition 2.13 heißt ein Vektorpotential $\mathbf{A} \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $\text{rot } \mathbf{A} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = B$ zulässig, wenn $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|)$ gilt und $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ integrierbar abfällt. Nach Satz 4.16 existiert $S = S(H_0, H_0 + A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A})$ für kurzreichweitiges A_0 und zulässiges \mathbf{A} , und vermutlich ist S unitär. Nach Lemma 2.14 gibt es zu jedem kompakten Magnetfeld

B zulässige Vektorpotentiale, und zu $\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}$ mit $\text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \tilde{\mathbf{A}} = B \in C_0^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ gibt es ein $\lambda \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\lambda$. $\Lambda(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r\mathbf{x})$ existiert und ist stetig und homogen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Durch Betrachtung unterschiedlich verschobener transversaler Eichungen sieht man, daß tatsächlich $\Lambda(\mathbf{x}) \neq 0$ sein kann. Wegen unserer Wahl zulässiger Vektorpotentiale müssen wir jetzt eine größere Eichgruppe betrachten als bei den kurzreichweitigen Vektorpotentialen. Nach Lemma 4.18 ist S nicht mehr eichinvariant, es gilt stattdessen die Transformationsformel $\tilde{S}_\pm = e^{i\Lambda(\pm\mathbf{p})} S_\pm e^{-i\Lambda(\mp\mathbf{p})}$. Damit beweisen wir den folgenden

Satz 7.8 (Hochenergielimes von S bei kompaktem Magnetfeld) Sei $\nu = 2$ und $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ mit $m \geq 0$. Sei A_0 stetig mit integrierbarem Abfall und $B \in C_0^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ein kompaktes Magnetfeld. Dann gilt für jedes zulässige \mathbf{A} gemäß Definition 2.13 und $S = S(H_0, H_0 + A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A})$

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-iv\mathbf{x}_{NW}} S_\pm e^{iv\mathbf{x}_{NW}} = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 \mp \omega \cdot \mathbf{A})(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt \right\} .$$

Dabei haben wir angenommen, daß S für ein und damit für alle zulässigen Vektorpotentiale unitär ist. Wenn diese Annahme nicht erfüllt ist, dann gilt die Aussage des Satzes nur als schwacher Grenzwert.

Die Voraussetzung $m > 0$ ist für $\nu = 2$ nicht erforderlich, da auch im Fall $m = 0$ eine Matrix β so existiert, daß die Vertauschungsrelationen erfüllt sind, und mit diesem β kann man die Foldy-Wouthuysen-Darstellung definieren.

Beweis: Nach Satz 4.15 existiert (zu festem ω) ein \mathbf{A}^t in einer geeignet verschobenen transversalen Eichung derart, daß für $V^t = A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}^t$ folgendes gilt: Zu Ψ mit $\hat{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^\mu)$ gibt es ein $v_0 > 0$ und eine Funktion $h \in L^1(\mathbb{R})$ so, daß

$$\|V^t e^{-iH_0 t} e^{iv\mathbf{x}} \Psi\| \leq h(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, v \geq v_0.$$

Mit dieser Abschätzung lassen sich alle Beweisschritte zu den Sätzen 7.2 und 7.6 übertragen, und es folgt für $S^t = S(H_0, H_0 + A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}^t)$:

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-iv\mathbf{x}_{NW}} S_\pm^t e^{iv\mathbf{x}_{NW}} = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 \mp \omega \cdot \mathbf{A}^t)(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt \right\} .$$

Nun ist $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t + \nabla\lambda$ und mit $\Lambda(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r\mathbf{x})$ gilt nach Lemma 4.18 $S_\pm = e^{i\Lambda(\pm\mathbf{p})} S_\pm^t e^{-i\Lambda(\mp\mathbf{p})}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} & s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-iv\mathbf{x}_{NW}} S_\pm e^{iv\mathbf{x}_{NW}} \\ &= e^{i\Lambda(\pm\omega)} e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 \mp \omega \cdot \mathbf{A}^t)(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt} e^{-i\Lambda(\mp\omega)} \\ &= e^{-i \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt \mp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \cdot \mathbf{A}^t(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt + \Lambda(\omega) - \Lambda(-\omega) \right\} \right)} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{und mit} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \cdot \mathbf{A}^t(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \cdot \nabla \lambda(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \cdot \mathbf{A}^t(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt + \Lambda(\omega) - \Lambda(-\omega)
\end{aligned}$$

folgt die Behauptung. ■

Es ist wichtig, daß die verschobene transversale Eichung nur als Zwischenschritt im Beweis verwendet wurde und daß die Aussage für jedes zulässige \mathbf{A} gilt. Wenn wir nur den Hochenergielimes von S^t kennen würden, dann könnten wir das elektromagnetische Feld nicht aus einer einzigen S-Matrix rekonstruieren, da wir mindestens zwei verschiedene Eichungen verwenden müßten, um $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt$ für alle $\omega \in S^1$ zu erhalten. Außerdem wäre es physikalisch nicht sinnvoll, Voraussetzungen an die Eichung zu stellen, da alle Meßergebnisse prinzipiell von der Eichung unabhängig sind.

Wir kommen nun zur inversen Streutheorie. Da keine Eichung physikalisch ausgezeichnet ist, tritt das folgende Problem auf: Wir haben bislang angenommen, daß die S-Matrix meßbar ist, doch spätestens hier müssen wir diese Annahme aufgeben, da S nicht eichinvariant ist.

Wir gehen davon aus, daß wir dem Streuexperiment ein Interferenzexperiment nachschalten und dadurch die relative Phase (s.u.) von S bzw. von ihrem Hochenergielimes bestimmen. Die relative Phase des Hochenergielimes ist tatsächlich eichinvariant, wie der folgende Satz zeigt. Die bisherigen Aussagen zur Rekonstruktion des Potentials lassen sich auch mit dieser Annahme formulieren, da die absolute Phase bei kurzreichweitigen Potentialen für $|\mathbf{x}^\perp| \rightarrow \infty$ verschwindet und sich daher eindeutig aus der relativen Phase ergibt.

Satz 7.9 (Rekonstruktion des kompakten Magnetfeldes) *Sei $\nu = 2$ und $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ mit $m \geq 0$. Sei A_0 stetig mit integrierbarem Abfall und $B \in C_0^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ein differenzierbares kompaktes Magnetfeld. Dann gilt:*

Die relative Phase von $s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-iv\mathbf{x}_{NW}} S_\pm e^{iv\mathbf{x}_{NW}}$ ist unabhängig davon, welches zulässige \mathbf{A} zur Definition von $S = S(H_0, H_0 + A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A})$ verwendet wird, und sie bestimmt A_0 und B eindeutig.

Beweis: Nach Satz 7.8 gilt für jedes zulässige \mathbf{A}

$$s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-iv\mathbf{x}_{NW}} S_\pm e^{iv\mathbf{x}_{NW}} = e^{-if(\mathbf{x}_{NW}, \omega)}$$

mit $f(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt (A_0 - \omega \cdot \mathbf{A})(\mathbf{x} + \omega t)$. Bei Wahl einer anderen Eichung ändert sich die absolute Phase f nur um eine von ω abhängige Konstante, dabei ändert

sich die relative Phase $f(\mathbf{x}_1, \omega) - f(\mathbf{x}_2, \omega)$ nicht.

Wenn wir nun f bis auf eine von ω abhängige Konstante kennen, dann kennen wir auch $f_0(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt A_0(\mathbf{x} + \omega t)$ und $f_1(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \omega \mathbf{A}(\mathbf{x} + \omega t)$ bis auf Konstanten. f_0 ist eindeutig bestimmt durch die Forderung $\lim_{|\mathbf{x}^\perp| \rightarrow \infty} f_0(\mathbf{x}, \omega) = 0$, und mit Satz 2.16 läßt sich A_0 rekonstruieren. Nach Satz 2.18 erhält man B folgendermaßen: Sei ϖ der gegenüber ω um -90° gedrehte Einheitsvektor, also $\varpi = (\omega_2, -\omega_1)^T$. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt B(\varpi s + \omega t) = \frac{d}{ds} f_1(\varpi s, \omega) ,$$

und hierfür genügt es, daß wir f_1 nur bis auf eine additive Konstante kennen. ■

Nach formaler Rechnung gilt für $B \in C_0^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und ein zulässiges Vektorpotential \mathbf{A} mit $S = S(H_0, H_0 - \alpha \cdot \mathbf{A})$ und $\varpi = (\omega_2, -\omega_1)^T$:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left(S_\pm e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} \Phi, [\varpi \cdot \mathbf{p}, S_\pm] e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} \Psi \right) = \mp \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(\Phi, B(\mathbf{x} + \omega t) \Psi \right) . \quad (7.13)$$

Vermutlich ist dies für $\Phi, \Psi \in D(H_0)$ richtig, doch das ist nicht bewiesen.

Kapitel 8

Diskussion

8.1 Bemerkungen zur stationären Theorie

Wir wollen die stationäre Methode formal skizzieren. Sei $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und $H_0 = E(|\mathbf{p}|)$ im Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R})$. Für geeignetes V hat S im Impulsraum den singulären Integralkern

$$\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - 2\pi i \delta(E(|\mathbf{p}|) - E(|\mathbf{q}|)) T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad \text{mit} \quad T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \left(e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{E(|-i\nabla|) - E(|\mathbf{q}|) + V(\mathbf{x}) - i\varepsilon} V(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \right).$$

Für $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ergibt sich formal

$$\begin{aligned} & T(\mathbf{p} + \mathbf{v}, \mathbf{q} + \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \left(e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega \cdot (-i\nabla - \mathbf{q}) + \mathcal{O}(1/v) + V(\mathbf{x}) - i\varepsilon} V(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \right) \\ &\rightarrow \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \left(e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega \cdot (-i\nabla - \mathbf{q}) + V(\mathbf{x}) - i\varepsilon} V(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int d\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) e^{-i \int_{-\infty}^0 dt V(\mathbf{x} + \omega t)}. \end{aligned}$$

Die entsprechende Aussage für die Dirac-Gleichung mit $\nu = 3$ und einem analogen on-shell-Grenzwert wurde von Ito in [20] bewiesen. Dabei wird das „limiting absorption principle“ benutzt. Dieses besagt, daß $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{H - E - i\varepsilon}$ in einer geeigneten Norm gleichmäßig bezüglich E existiert. Ito benötigt die Voraussetzung $V \in C^2$ mit $\partial^\gamma V(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|^{3+\varepsilon})$ für $|\gamma| \leq 2$. Mit der zeitabhängigen Methode benötigen wir für die analoge Aussage nur die Voraussetzung $V \in C^0$ mit integrierbarem Abfall.

8.2 Physikalische Deutung

Wir haben am Ende von Abschnitt 5.1 und 6.1 erläutert, wie die Form des Hochenergielimes von S zustande kommt: Wegen $\sigma_{\mathbf{x}} = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|/v)$ strebt die Streuung des Ortes in jedem beschränkten Gebiet gegen 0 und die freie Zeitentwicklung reduziert sich auf eine reine Translation ohne Zerfließen, daher strebt S gegen einen Multiplikationsoperator. Für $H_0 = |\mathbf{p}|^\alpha$ mit $\alpha > 1$ ist die Geschwindigkeit unbeschränkt, daher dominiert der Term erster Ordnung in der Dyson-Reihe. Bei den relativistischen Operatoren ist die Geschwindigkeit beschränkt und die Terme der Dyson-Reihe lassen sich zur Exponentialfunktion aufsummieren.

Der Hochenergielimes von S_{\pm} bei der Dirac-Gleichung ist $e^{iS_{kl}/\hbar}$ mit der klassischen Wirkung $S_{kl} = -\int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 \mp \omega \cdot \mathbf{A})(\mathbf{x}_{NW} + \omega t) dt$. Dies entspricht der Erwartung, daß bei hoher Energie der semi-klassische Limes anwendbar ist.

Wenn man die Lichtgeschwindigkeit c wieder in die Dirac-Gleichung einführt, ergibt sich

$$\begin{aligned} s - \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} S_+ e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}} &= \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} (A_0 - c \omega \cdot \mathbf{A})(\mathbf{x}_{NW} + c \omega t) dt \right\} \\ &= \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{c} A_0 - \omega \cdot \mathbf{A} \right) (\mathbf{x}_{NW} + \omega \tau) d\tau \right\} \\ &\xrightarrow{c \rightarrow \infty} \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_{NW} + \omega \tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Dies wird man als Hochenergielimes bei der Pauli-Gleichung erwarten, und S. Arians zeigt in [2, 3], daß dies der Hochenergielimes von S bei der Schrödingergleichung für ein Spin-0-Teilchen im Magnetfeld ist.

Die Eindeutigkeitsaussage für die Rekonstruktion eines elektromagnetischen Feldes aus Streudaten ist theoretisch interessant, auch wenn sie wohl kaum auf praktische Experimente angewandt werden kann (s.u.).

Die Formeln für den Hochenergielimes von S sind auch unabhängig von Fragen der Rekonstruktion interessant, da sie die asymptotische Gestalt von S für große Energien angeben.

Insbesondere ist in der relativistischen Streutheorie die erste Bornsche Näherung nur für kleine Kopplungskonstanten brauchbar, während sie in der nicht-relativistischen Theorie auch bei großen Kopplungskonstanten eine gute Näherung darstellt, wenn die Energie groß ist.

Der praktischen Anwendung unserer Formeln zur Rekonstruktion eines Potentials aus experimentell gewonnenen Streudaten stellen sich verschiedene Schwierigkeiten entgegen:

1. Da die Messungen nur eine beschränkte Genauigkeit haben und bei endlicher Energie durchgeführt werden, wäre eine explizite Fehlerabschätzung

in einer geeigneten Topologie erforderlich.

2. Bei hoher Energie ist die Schrödinger-Gleichung durch die Dirac-Gleichung und diese schließlich durch eine Quantenfeldtheorie zu ersetzen, d.h. mit dem Hochenergielimes wird der physikalische Geltungsbereich der Gleichungen verlassen.
3. Üblicherweise wird in Streuexperimenten nicht die Streuamplitude f gemessen, sondern nur der Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\omega} = |f|^2$. Wir benötigen jedoch die Phase von f zur Rekonstruktion des Potentials.

Es gibt zwei Ideen zur Überwindung der letztgenannten Schwierigkeit:

1. Es gibt Ansätze, f aus $|f|$ zu gewinnen [28, p. 160].
2. Es ist zwar sehr aufwendig, aber zumindest denkbar, dem Streuexperiment ein Interferenzexperiment nachzuschalten, um die relative Phase von Teilen der gestreuten Welle zu bestimmen. Hierzu ist noch genauer zu untersuchen, was bei einem solchen Experiment prinzipiell meßbar wäre, unter Berücksichtigung der Eichinvarianz.

8.3 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben die inverse Streutheorie für kurzreichweitige Potentiale bei drei freien Hamiltonoperatoren untersucht: Dem verallgemeinerten Schrödingeroperator $|\mathbf{p}|^\alpha$ mit $\alpha > 1$, dem skalaren relativistischen Hamiltonoperator $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ mit $m \geq 0$ und bei dem Dirac-Operator $\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$. Die kurzreichweitigen Potentiale sind dabei Kato-beschränkt mit $a < 1$ bezüglich H_0 und erfüllen eine Abfallbedingung, die lokale Singularitäten zuläßt. Mit der zeitabhängigen, geometrischen Methode nach V. Enß und R. Weder ergab sich jeweils eine Formel für den Hochenergielimes von S , mit der man die X-Ray-Transformierte des Potentials V erhält und daraus für $\nu \geq 2$ das Potential rekonstruieren kann.

1. Für $H_0 = |\mathbf{p}|^\alpha$ lassen sich beide Schritte für allgemeine kurzreichweitige Potentiale durchführen. Dies verallgemeinert die Ergebnisse von V. Enß und R. Weder für die Schrödinger-Gleichung ($\alpha = 2$).
2. Für $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ haben wir den Hochenergielimes von S im allgemeinen Fall bestimmt, doch zur Rekonstruktion des Potentials V haben wir die zusätzliche Voraussetzung benötigt, daß dieses stetig ist.

3. Für $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ und das Potential eines elektromagnetischen Feldes $V = A_0 - \alpha \cdot \mathbf{A}$ wurde der Hochenergielimes von S für stetiges bzw. beschränktes V bestimmt, und die Rekonstruktion von A_0 und \mathbf{A} (bis auf Eichfreiheit) gelingt unter der zusätzlichen Voraussetzung $\mathbf{A} \in L^2$. Dies verallgemeinert das Ergebnis, das Ito [20] mit stationären Methoden erzielt. Außerdem haben wir die Aussagen auf zweidimensionale Magnetfelder mit kompaktem Träger verallgemeinert.

Damit wurden die folgenden Fragen aufgeworfen:

1. Wie läßt sich bei $H_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ein allgemeines Potential rekonstruieren?
2. Wie läßt sich der Hochenergielimes von S für $H_0 = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$ und ein Potential mit lokalen Singularitäten bestimmen?
3. Wie zeigt man, daß \mathbf{A} auch ohne die Voraussetzung $\mathbf{A} \in L^2$ bis auf einen Gradienten bestimmt ist?
4. Wieweit lassen sich die Aussagen für kompakte Magnetfelder verallgemeinern, vielleicht auf $B(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|^{2+\varepsilon})$? Ist die S-Matrix in diesem Fall unitär?
5. Gilt die Formel (7.13) für $S^+[\varpi \cdot \mathbf{p}, S]$?
6. Inwieweit ist es physikalisch realistisch, die relative Phase von S als meßbar anzusehen?

Einige weitere interessante Fragestellungen zur inversen Streutheorie sind:

1. Kann man die Translation im Impulsraum statt mit $e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}}$ oder $e^{i\mathbf{v}\mathbf{x}_{NW}}$ auch mit einem Lorentz-boost erzeugen?
2. Inwieweit ist die Rekonstruktion in einer geeigneten Topologie stetig?
3. Inwieweit ist eine Rekonstruktion des Potentials aus dem Streuquerschnitt möglich?
4. Die Verallgemeinerung auf langreichweitige Potentiale (Dollard-S-Matrix).
5. Die Verallgemeinerung auf andere Gleichungen, z.B. die Klein-Gordon-Gleichung oder Schallstreuung.

Literaturverzeichnis

- [1] Y. Aharonov und D. Bohm, Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory, *Phys. Rev.* **115**, 485–491 (1959).
- [2] S. Arians, Geometrical Approach to Inverse Scattering for the Schrödinger Equation with Magnetic and Electric Potentials, in Vorbereitung.
- [3] S. Arians, Dissertation, RWTH Aachen, in Vorbereitung.
- [4] Yu M. Berezanskii, The Uniqueness Theorem in the Inverse Problem of Spectral Analysis for the Schrödinger Equation, *Tr. Mosk. Math. Obshch.* **7**, 3–62 (1958) [Englische Übersetzung in *Am. Math. Soc. Transl.* **35**, 167–235 (1964)].
- [5] J.D. Bjorken und S.D. Drell, *Relativistische Quantenmechanik*, BI, Mannheim 1990.
- [6] J.D. Bjorken und S.D. Drell, *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI, Mannheim 1990.
- [7] P.L. Butzer und H. Berens, *Semi-Groups of Operators and Approximation*, Springer, Berlin Heidelberg 1967.
- [8] K.R. Darthasarathy, On the Exact Bound of the Coulomb Potential with Respect to the Dirac Operator, *Lett. Math. Phys.* **2**, 413–415 (1978).
- [9] J. D. Dollard, Scattering into Cones I: Potential Scattering, *Comm. Math. Phys.* **12**, 193–203 (1969).
- [10] V. Enß, Asymptotic Completeness for Quantum Mechanical Potential Scattering, *Comm. Math. Phys.* **61**, 285–291 (1978).
- [11] V. Enß, Propagation Properties of Quantum Scattering States, *J. Func. Ana.* **52**, 219–251 (1983).

- [12] V. Enß und R. Weder, Inverse potential scattering: A geometrical approach, in: *Mathematical Quantum Theory II: Schrödinger Operators*, J. Feldman, R. Froese, L.M. Rosen eds., CRM Proceedings and Lecture Notes **8**, 151–162, AMS, Providence (1995).
- [13] V. Enß und R. Weder, The geometrical approach to multidimensional inverse scattering, *J. Math. Phys.* **36**, 3902–3921 (1995).
- [14] V. Enß und R. Weder, Uniqueness and Reconstruction Formulae for Inverse N -Particle Scattering, in: *Differential Equations and Mathematical Physics*, I. Knowles ed., pp. 55–66, International Press, Boston (1995).
- [15] V. Enß und R. Weder, Inverse Two Cluster Scattering, Preimpreso No.38, IIMAS-UNAM, Mexico (1996). Erscheint in *Inverse Problems*.
- [16] V. Enß und B. Thaller, Asymptotic Observables and Coulomb Scattering for the Dirac Equation, *Ann. Inst. H. Poincaré* **45**, 147–171 (1986).
- [17] L.D. Faddeev, Uniqueness of the Solution of the Inverse Scattering Problem, *Vestn. Leningrad Univ.* **11**, Nr.7, 126–130 (1956).
- [18] I.M. Gel'fand und G.E. Shilov, *Generalized Functions I*, Academic Press, New York 1964.
- [19] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Academic Press, Orlando 1984.
- [20] H.T. Ito, High-energy behavior of the scattering amplitude for a Dirac operator, erscheint in *Publ.RIMS*, Kyoto Univ. 1996.
- [21] W. Jung, Geometrical Approach to Inverse Scattering for the Dirac Equation, zur Veröffentlichung eingereicht bei *J. Math. Phys.* (1996).
- [22] H. Kalf, U.-W. Schmincke, J. Walter und R. Wüst, On the Spectral Theory of Schrödinger and Dirac Operators with Strongly Singular Potentials, in: *Spectral Theory and Differential Equations*, W. N. Everitt ed., Lecture Notes in Mathematics **448**, 182–226, Springer, Berlin Heidelberg (1975).
- [23] L.D. Landau und E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik*, Akademie-Verlag, Berlin 1976.
- [24] L.D. Landau und E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik II: Klassische Feldtheorie*, Akademie-Verlag, Berlin 1976.

- [25] L.D. Landau und E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik III: Quantenmechanik*, Akademie-Verlag, Berlin 1979.
- [26] W.B. Berestetzki, E.M. Lifschitz und L.P. Pitajewski, *Lehrbuch der theoretischen Physik IV: Quantenelektrodynamik*, Akademie-Verlag, Berlin 1986.
- [27] R. G. Newton, *Inverse Schrödinger Scattering in Three Dimensions*, Springer, Berlin Heidelberg 1989.
- [28] M. Reed und B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, San Diego 1980.
- [29] M. Reed und B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, San Diego 1975.
- [30] M. Reed und B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics III: Scattering Theory*, Academic Press, New York 1979.
- [31] Y. Saito, An Asymptotic Behavior of the S -matrix in the Inverse Scattering Problem, *J. Math. Phys.* **25**, 3105–3111 (1984).
- [32] Y. Saito, An Approximation Formula in the Inverse Scattering Problem, *J. Math. Phys.* **27**, 1145–1153 (1986).
- [33] B. Simon, Phase Space Analysis of Simple Scattering Systems: Extensions of Some Work of Enss, *Duke Math J.* **46**, 119–168 (1979).
- [34] J. Sucher, Relativistic Invariance and the Squareroot Klein-Gordon Equation, *J. Math. Phys.* **4**, 17–23 (1963).
- [35] B. Thaller, *The Dirac Equation*, Springer, Berlin Heidelberg 1992.
- [36] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer, Berlin Heidelberg 1980.

Danksagung

Ich möchte Herrn Professor V. Enß für die engagierte Betreuung, seine wertvollen Hinweise und sein Interesse an dieser Arbeit ganz herzlich danken.

Ferner danke ich:

Silke Arians für interessante Diskussionen und ihre Hilfe beim Korrekturlesen.

Lorenz Bethge für seine Unterstützung bei der Einrichtung meines Computers und beim Korrekturlesen.

Arnd von der Heyden für seine Hilfe bei meinen ersten Schritten mit \LaTeX .

Meinen Eltern für einen Großteil der Finanzierung meines Studiums.

Der Studienstiftung des Deutschen Volkes für ihre Förderung.

Meiner Familie und meinen Freunden, insbesondere Thomas Jäger, für ihre Ermutigung.

Ich versichere, daß ich die Arbeit selbständig verfaßt, alle verwendeten Quellen angegeben und Zitate kenntlich gemacht habe.

Aachen, den 29. August 1996